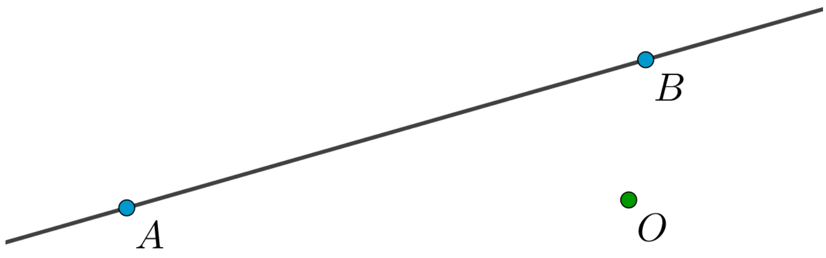
Урок 1. Основные объекты планиметрии.

Два основных объекта, на которых базируется вся планиметрия (то есть геометрия на плоскости) – это точка и прямая.



Аксиома 1
Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.

Как следствие, существует два взаимных расположения двух прямых на плоскости:
- прямые не имеют общих точек;
- прямые имеют ровно одну общую точку, иначе говоря, прямые пересекаются.

Рассмотрим другие основные объекты, созданные при помощи точек и прямых.

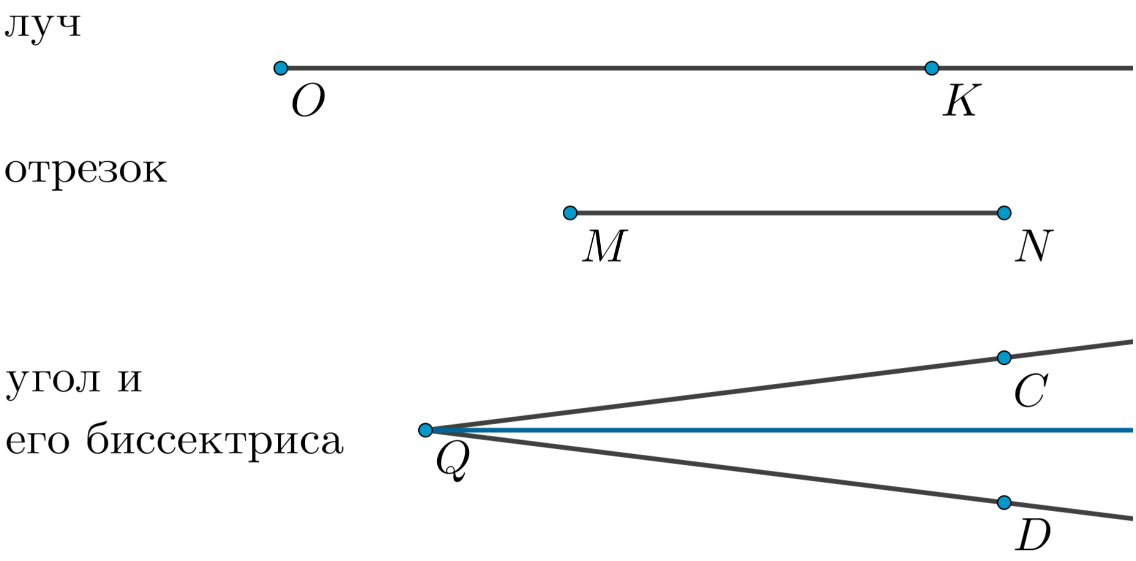
Определения
Если на некоторой прямой отметить точку, то данная точка разобьет прямую на две части, каждая из которых называется **лучом**, исходящим из данной точки. Данная точка называется началом каждого из лучей.

Отрезок – часть прямой, ограниченная с двух сторон двумя точками. Данные точки называются концами отрезка.
Точка, делящая отрезок пополам, называется его серединой.

Угол – это геометрическая фигура, состоящая из точки и двух лучей, выходящих из этой точки. Градусная мера угла в нашем курсе может принимать значения от 0° до 180° включительно.

Угол α называется острым, если $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, прямым – если $\alpha = 90^\circ$, тупым – если $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, и развернутым – если $\alpha = 180^\circ$. (Развернутый угол – угол, каждая сторона которого является продолжением другой, то есть обе стороны лежат на одной прямой.)

Любой угол разделяет плоскость на две части, одна из которых называется внутренней, а другая – внешней областью данного угла.



Биссектриса угла – это луч, выходящий из вершины угла и делящий угол пополам.

Смежные углы – это два угла, у которых общая вершина и одна общая сторона, а две другие стороны образуют прямую.

Вертикальные углы – это два угла, образованные пересечением двух прямых и не являющиеся смежными.

Обозначения геометрических объектов.

- Точка обозначается заглавной латинской буквой: A, B, C, D и т.д.
- Прямая обозначается прописной латинской буквой: a, b, c, d и т.д., либо двумя заглавными латинскими буквами, обозначающими две точки на данной прямой: AB, CD и т.д.
- Луч обозначается либо одной прописной латинской буквой, либо двумя заглавными латинскими буквами: AB, CH и т.п., где первая буква обозначает начало луча, а вторая – некоторую точку на самом луче.

• Отрезок обозначается двумя заглавными латинскими буквами, обозначающими концы этого отрезка: AB, CD и т.д.

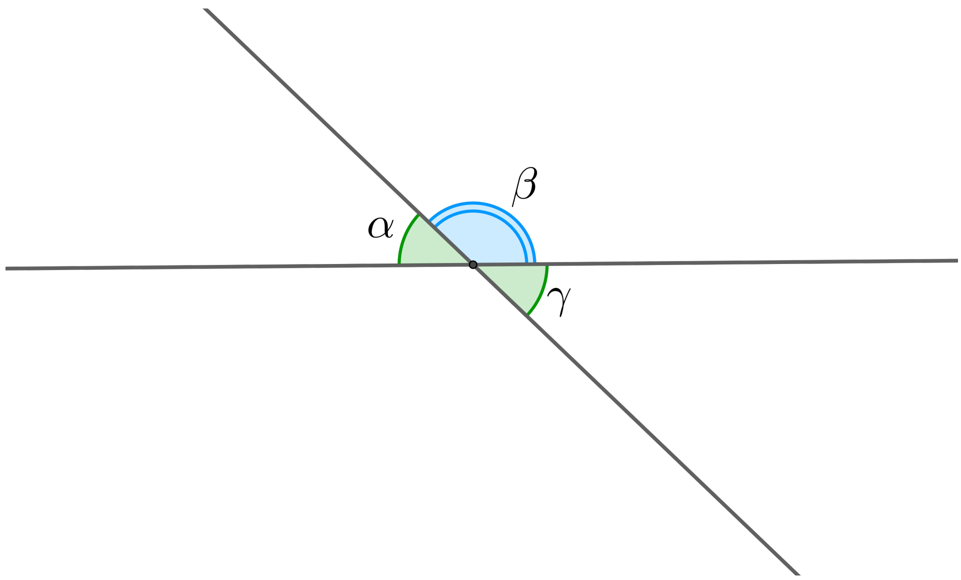
• Угол обозначают либо тремя заглавными латинскими буквами: ABC, FGH, где средняя буква обозначает вершину угла, а две другие – некоторые точки на сторонах угла, либо двумя прописными латинскими буквами: hk, где каждая буква обозначает сторону угла. Градусную меру угла можно обозначать греческой буквой: $\alpha, \beta, \gamma, \phi$ и т.д. Иногда угол ассоциируют с ее градусной мерой и обозначают также. Следует заметить, что для угла также принято перед его названием ставить знак угла: $\angle$.

Иногда, если не возникает двусмысленности, угол можно обозначать только его вершиной: $\angle A$.

Теорема

Смежные углы α и β в сумме дают $180°$: $\alpha + \beta = 180°$.

Вертикальные углы равны: $\alpha = \gamma$.



1. Один из смежных углов прямой. Каким является другой угол?

2. Верно ли утверждение: если смежные углы равны, то они прямые?

3. Найдите неразвернутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если сумма двух из них равна 114°.

4. Сколько неразвернутых углов образуется при пересечении трех прямых, проходящих через одну точку?

5. Точка A лежит на отрезке BC. Расстояние между точками B и C равно 24, а расстояние между точками A и B в два раза больше расстояния между точками A и C. Найдите длины отрезков AC и AB.

6. Отрезок длины l разделен на 5 равных частей. Найдите расстояние между серединами крайних частей.

7. Отрезок длиной a разделен на четыре не равные друг другу части. Расстояние между серединами крайних частей равно b. Найдите расстояние между серединами средних частей.

8. Найдите смежные углы, если один из них на 30° больше другого.

9. Докажите, что угол между биссектрисами смежных углов равен 90° (они взаимно перпендикулярны).

10. Найдите смежные углы, если: а) один из них на 40° меньше другого; б) один из них в два раза больше другого; в) они относятся как $5:4$.

11. Найдите вертикальные углы, если смежный к одному из них в 5 раз его больше.

12. Найдите неразвернутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если сумма трех углов равна 220°.

13. Точки K, L, M лежат на одной прямой, причем $KL = 6$, $LM = 10$. Каким может быть расстояние KM?

14. Отрезок AB длины a разделен точками P и Q на три отрезка так, что $AP = 2PQ = 3QB$. Найдите расстояние от точки A до середины отрезка QB.

15. Точки A, B, C лежат на одной прямой, точки M, N – середины отрезков AB и AC соответственно. Докажите, что $BC = 2MN$.

16. Найдите угол, образованный биссектрисами вертикальных углов.

17. Докажите, что если биссектрисы углов ABC и CBD взаимно перпендикулярны (пересекаются под углом 90°), то точки A, B, D лежат на одной прямой.

1. Прямой.

2. Верно.

3. Так как при пересечении образуют две пары вертикальных углов, обозначим углы в первой паре за α, во второй – за β. Тогда $\alpha+\beta=180°$. Следовательно, $2\alpha=114°$, откуда $\alpha=57°$, $\beta=123°$.

4. 12.

5. Пусть $AC=x$, тогда $AB=2x$, следовательно, $3x=24$, откуда $AC=8$, $AB=16$.

6. Длина каждого отрезка равна $\frac{1}{5}l$. Тогда сумма длин двух крайних отрезков равна $\frac{1}{5}l$, откуда ответ: $\frac{4}{5}l$.

7. $\frac{1}{2}(2b-a)$.

8. $75°, 105°$.

9. Обозначим смежные углы за α и β. Тогда $\alpha+\beta=180°$. Угол между биссектрисами смежных углов равен $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=90°$.

10. а) $70°, 110°$; б) $60°, 120°$; в) $80°, 100°$.

11. $30°$.

12. $40°, 140°, 40°, 140°$.

13. $4; 16$.

14. $\frac{10}{11}a$.

15. Указание: принять половину длины отрезка AB за x, половину длины отрезка AC за y и записать длину отрезка BC. Учитывать многовариатность чертежа.

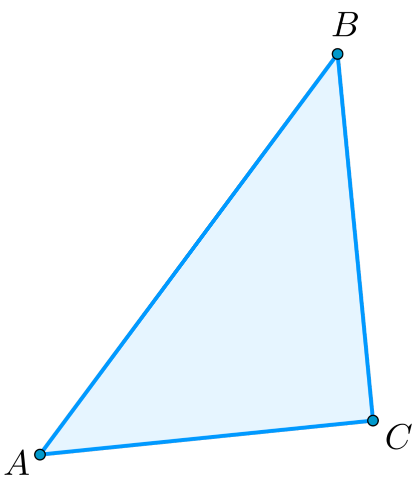
16. Указание: 180°.

17. Доказательство аналогично задаче 9.

Определения

Треугольник – это геометрическая фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой (называемых вершинами треугольника), и отрезков, соединяющих эти точки (называемых сторонами треугольника). Треугольник со своей внутренностью будем сокращенно называть также треугольником.

Угол (внутренний) треугольника – угол, образованный вершиной треугольника и двумя его сторонами.



Треугольник $\triangle ABC$

$$\left.\begin{array}{l}\angle BAC = \angle A\\ \angle ABC = \angle B\\ \angle BCA = \angle C\end{array}\right\}\text{углы треугольника}$$

Внешний угол треугольника – угол, смежный с каким-нибудь внутренним углом треугольника.

Периметр – сумма длин всех сторон треугольника.

Треугольник обозначается тремя заглавными латинскими буквами, обозначающими вершины треугольника: $\triangle ABC$.

Что такое равные геометрические фигуры? Это фигуры, которые можно совместить наложением. Если два треугольника равны, то все элементы одного треугольника (стороны и углы) равны соответствующим элементам второго треугольника. Также в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, а против равных сторон – равные углы.

Теоремы: признаки равенства треугольников

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

2. Если сторона и два прилежащих угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

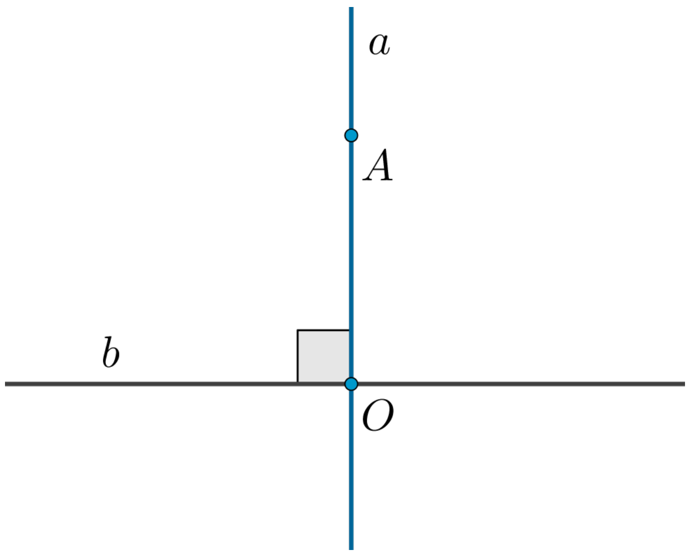
3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

4*. Если две стороны и угол, лежащий напротив большей из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, лежащему напротив большей из них, другого треугольника равны, то такие треугольники равны.

Определения

Угол между двумя прямыми – это меньший из четырех углов, образованных при пересечении этих прямых.

Две прямые называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90°. Если O – точка пересечения прямых a и b, A – некоторая точка на прямой a, то отрезок AO называется **перпендикуляром** к прямой b, а O – основанием этого перпендикуляра.



Теоремы

1. Две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются.

2. Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один (в плоскости данной точки и данной прямой).

Определения

Медиана треугольника – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Биссектриса треугольника – это отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны.

Высота треугольника – это перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.

Важное замечание

Если в треугольнике один угол тупой, то высота, опущенная из вершины острого угла, упадет не на сторону, а на продолжение стороны (рис. 1).

Теорема

В любом треугольнике высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке (рис. 1 и 2), биссектрисы пересекаются в одной точке (рис. 3), медианы пересекаются в одной точке (рис. 4).

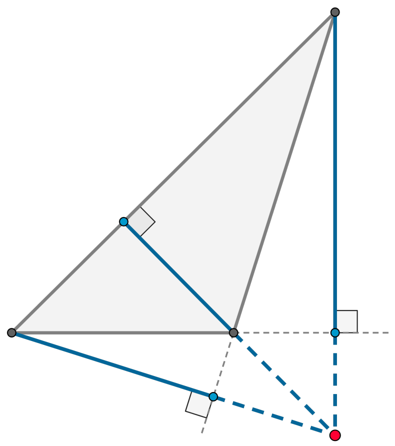


рис. 1

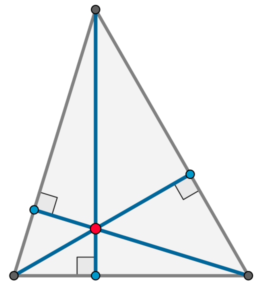


рис. 2

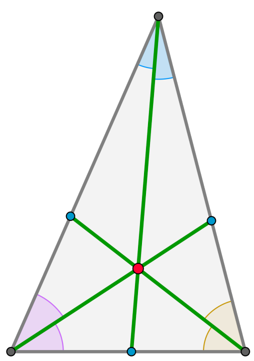


рис. 3

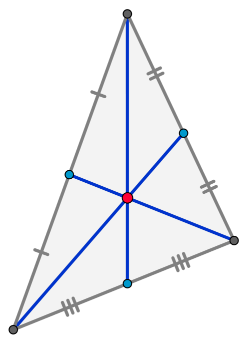


рис. 4

Задачи для аудиторной работы

---

1. Периметр треугольника равен 48, а одна из сторон равна 18. Найдите две другие стороны, если их разность равна $4,6$.

2. Периметр одного треугольника больше периметра другого. Могут ли быть эти треугольники равными?

3. Отрезки AC и BD точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$.

4. Треугольники ABD и ABD имеют общую сторону AD, а вершины B и C лежат по разные стороны от прямой AD. Известно, что $AB = AC$, $\angle BAD = \angle CAD$. а) Докажите, что $\triangle ABD = \triangle ACD$. б) Найдите BD и AB. если $AC = 15$, $DC = 5$.

5. Точки A и C лежат по одну сторону от прямой a. Перпендикуляры AB и CD к прямой a равны. а) Докажите, что $\angle ABD = \angle CDB$. б) Найдите $\angle ABC$, если $\angle ADB = 44°$.

6. Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы, проведенные к равным сторонам, равны.

7. На биссектрисе угла A взята точка B, а на сторонах этого угла – точки B, C такие, что $\angle ADB = \angle ADC$. Докажите, что $BD = CD$.

8. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки P и P_1 так, что $AP = A_1P_1$. Докажите, что $\triangle BPC = \triangle B_1P_1C_1$.

9. Отрезки AE и BC пересекаются в точке B, являющейся серединой каждого из них. а) Докажите, что $\triangle ABC = \triangle EBD$. б) Найдите углы A и C треугольника ABC, если в треугольнике BDE $\angle D = 47°$, $\angle E = 42°$.

10. На сторонах угла CAD отмечены точки B и E так, что точка B лежит на отрезке AC, а точка E – на отрезке AD, причем $AC = AD$, $AB = AE$. Докажите, что $\angle CBD = \angle DEC$.

11. Медиана AD треугольника ABC продолжена за точку D на отрезок DE, равный AD, и точке E соединена с точкой C. а) Докажите, что $\triangle ABD = \triangle ECD$. б) Найдите $\angle ACE$, если $\angle ACD = 56°$, $\angle ABD = 40°$.

12. Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведенные к равным сторонам, равны.

13. В треугольниках DEF и MNP $EF = NP$, $DF = MP$, $\angle E = \angle P$. Биссектрисы углов E и D пересекаются в точке O, а биссектрисы углов M и N – в точке K. Докажите, что $\angle DOE = \angle MKN$.

14. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ отрезки AD, A_1D_1 – биссектрисы, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$. Докажите. что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Определение

Две различные прямые на плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются (не имеют общих точек).

Замечание

Заметим, что на плоскости существует два вида взаимного расположения прямых: пересекаются и параллельны.

Аксиома 2 о параллельных прямых

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной.

Следствия из аксиомы

1. Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.
2. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.

Теоремы: свойства параллельных прямых

1. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

2. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.

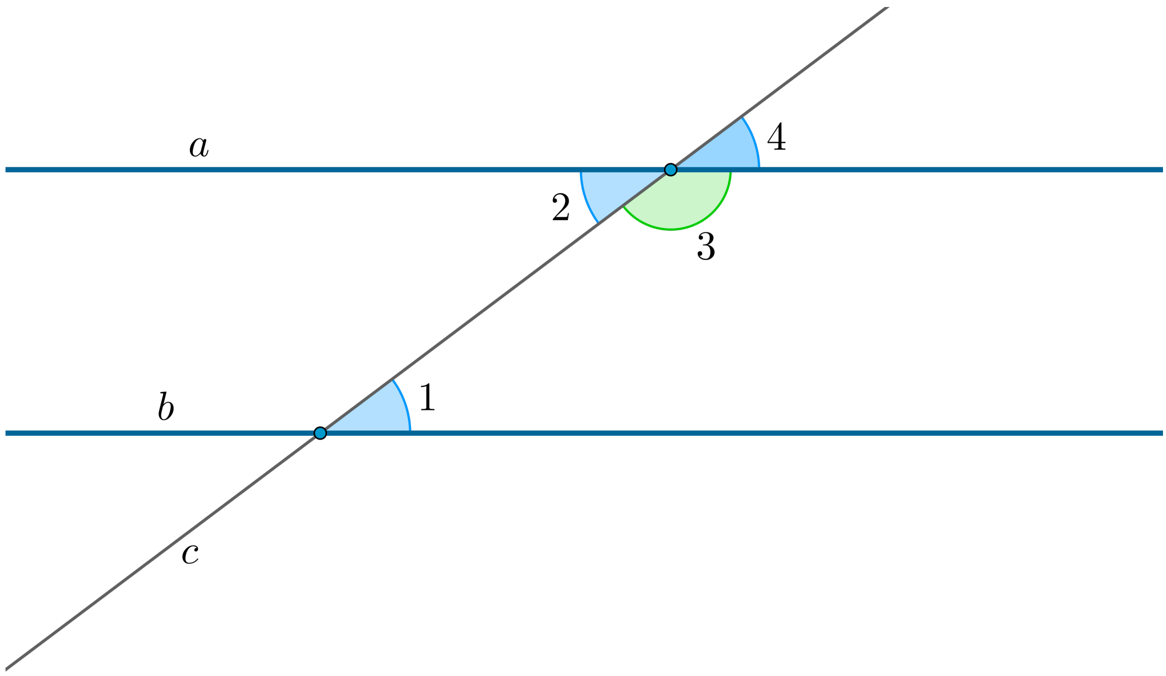
3. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.

Теоремы: признаки параллельности прямых

1. Если при пересечении двух прямых a и b секущей c накрест лежащие углы равны: $\angle 1 = \angle 2$, то такие прямые параллельны.

2. Если при пересечении двух прямых a и b секущей c сумма односторонних углов $\angle 1$ и $\angle 3$ равна 180°, то такие прямые параллельны.

3. Если при пересечении двух прямых a и b секущей c соответственные углы равны: $\angle 1 = \angle 4$, то такие прямые параллельны.



Углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами

Теоремы

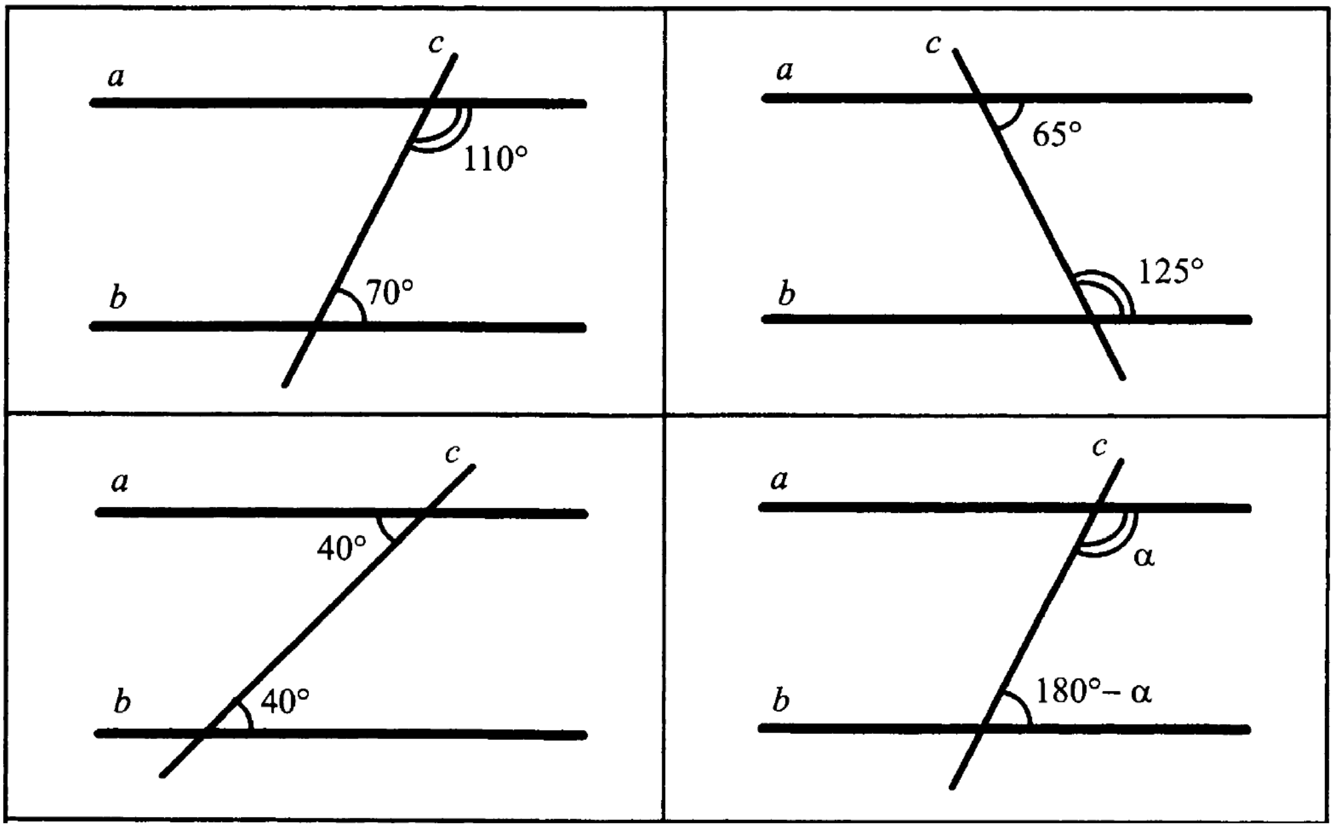
1. Если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют 180°.

2. Если стороны одного угла соответственно перпендикулярны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют 180°.

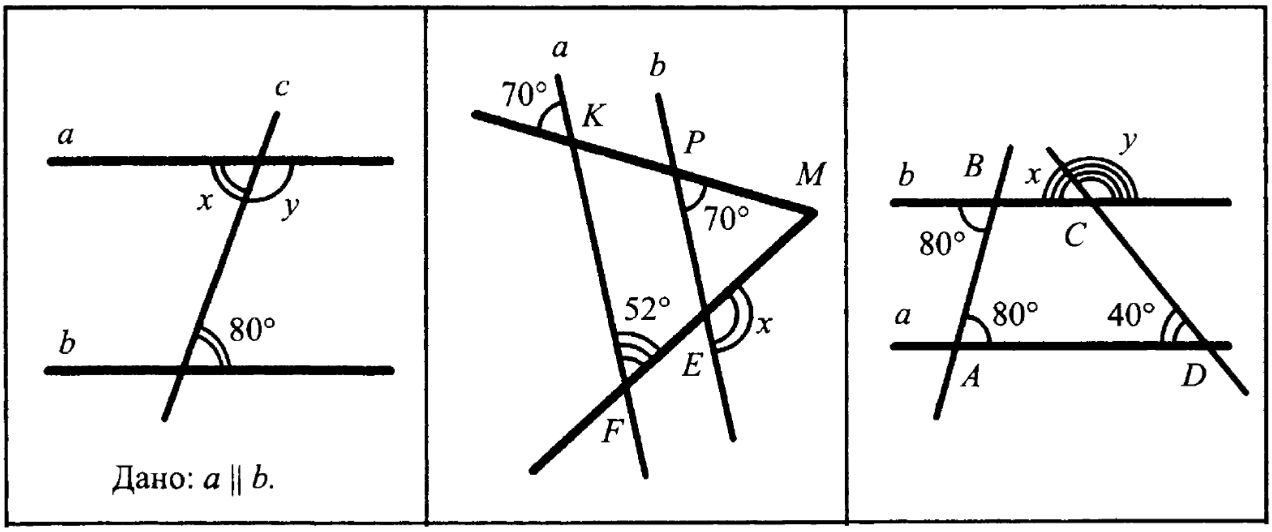
1. Прямая, проходящая через середину биссектрисы AD треугольника ABC и перпендикулярная к AD, пересекает сторону AC в точке M. Докажите, что $MD \parallel AB$.

2. Прямые a и b параллельны прямой c. Докажите, что любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает также и прямую b.

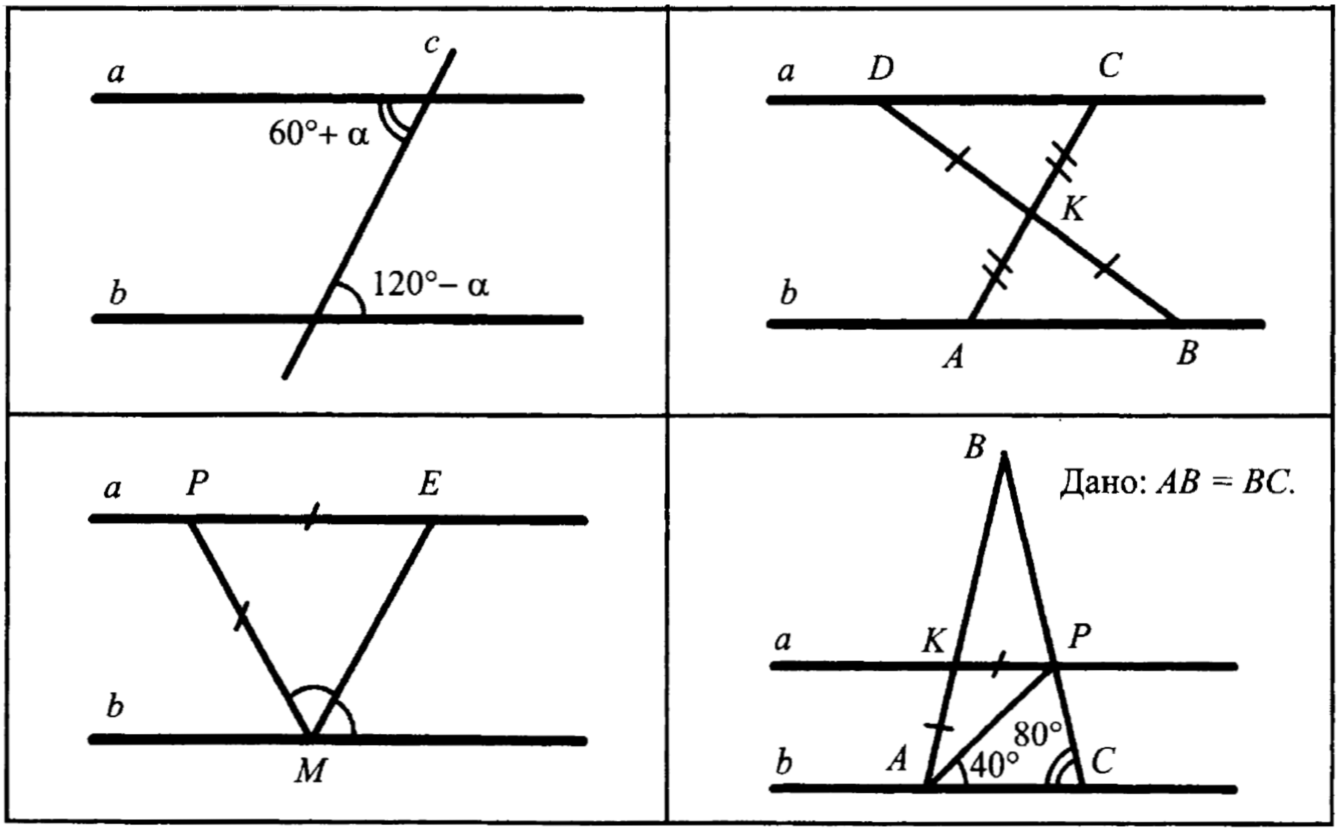
3. Параллельны ли прямые a и b?



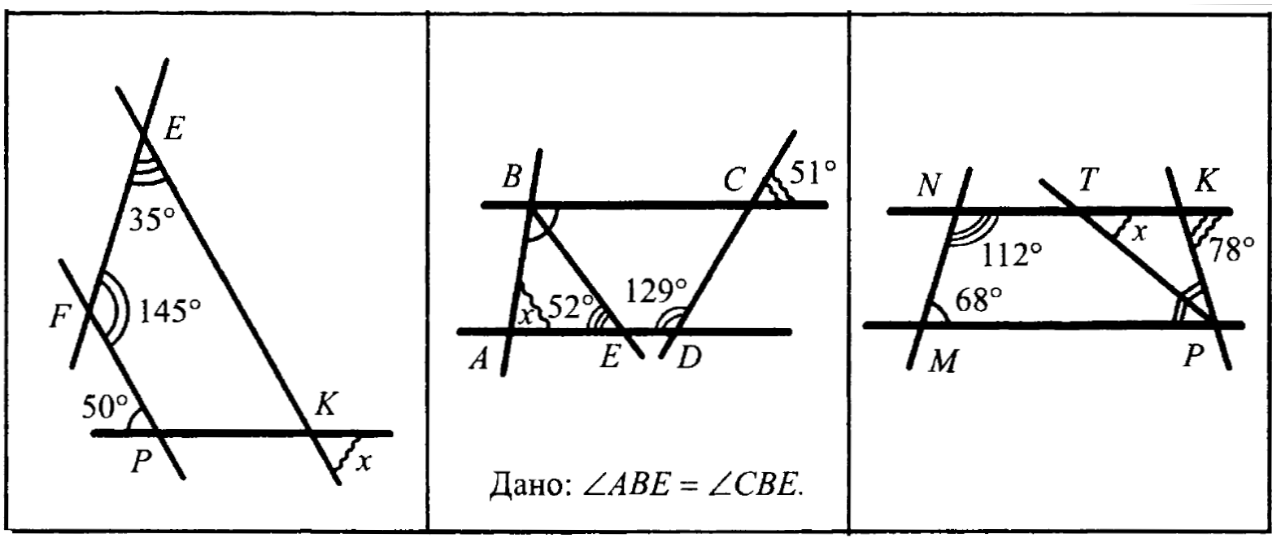
4. Найдите x и y:



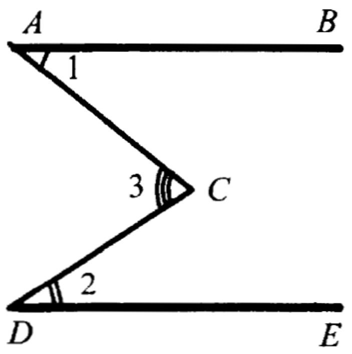
5. Параллельны ли прямые a и b?



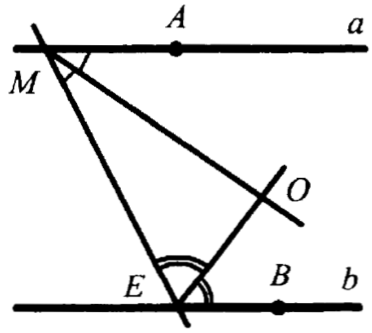
6. Найдите x и y:



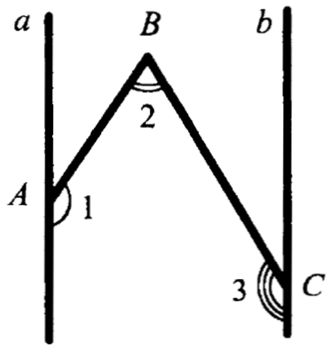
7. Решите следующие задачи:



Дано: $AB \parallel DE$.
Доказать: $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3$.



Дано: $a \parallel b$.
Доказать: $\angle MOE = \angle 90°$.



Дано: $a \parallel b$.
Доказать:
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360°$.

Определения

Треугольник называется остроугольным, если все его углы острые.

Треугольник называется тупоугольным, если один его угол тупой (остальные — острые).

Треугольник называется прямоугольным, если один его угол прямой (остальные — острые).

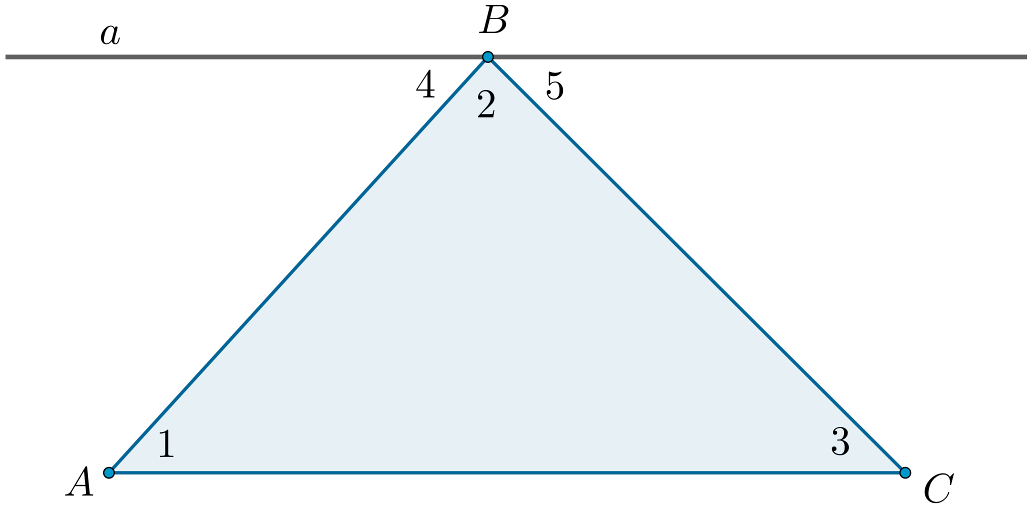
Теорема

Сумма внутренних углов треугольника равна $180°$.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и покажем, что $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Проведём через вершину B прямую a, параллельную стороне AC.



Углы 1 и 4 являются накрест лежащими углами при пересечении параллельных прямых a и AC секущей AB, а углы 3 и 5 – накрест лежащими углами при пересечении тех же параллельных прямых

секущей BC. Поэтому

$$\angle 4 = \angle 1, \ \angle 5 = \angle 3. \qquad (1)$$

Очевидно, сумма углов 4, 2 и 5 равна развёрнутому углу с вершиной B, то есть $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$. Отсюда, учитывая равенства (1), получаем: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

Определение

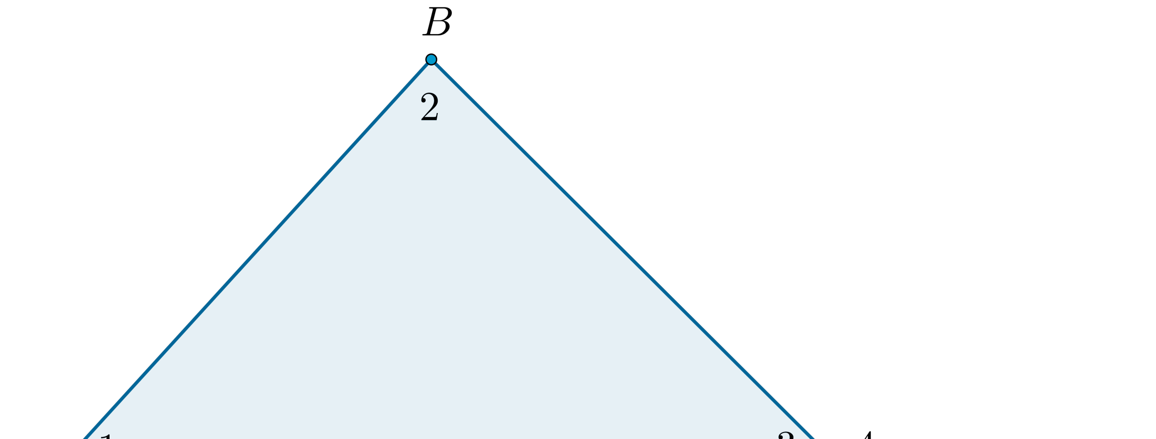
Внешний угол треугольника – это угол, смежный с каким-нибудь внутренним углом треугольника.

Теорема

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним: $\angle BCD = \angle BAC + \angle ABC$.

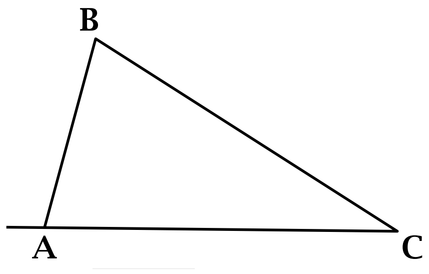
Доказательство

Рассмотрим рисунок.

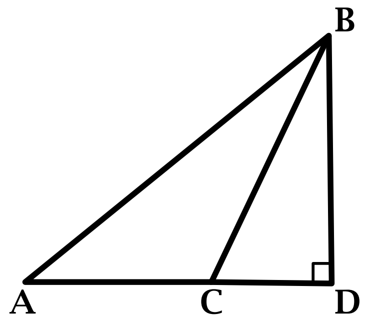


Угол 4 – внешний угол треугольника, смежный с углом 3. Так как $\angle 4 + \angle 3 = 180°$, а по теореме о сумме углов треугольника $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$, то $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$, что и требовалось доказать.

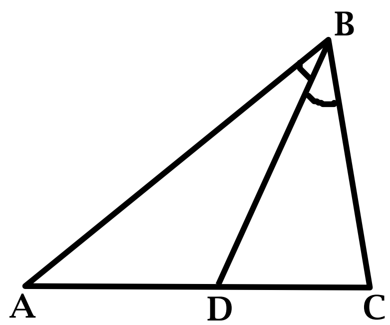
1. В треугольнике ABC: $\angle B = 81°$, $\angle C = 25°$. Найдите внешний угол при вершине A. Ответ дайте в градусах.



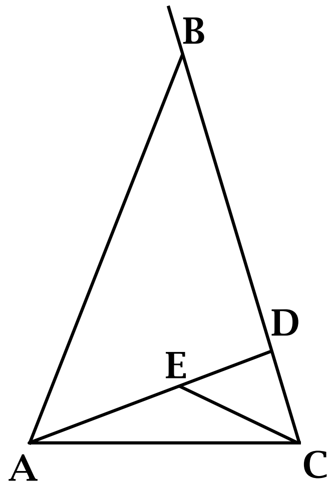
2. В треугольнике ABC: $\angle A = 35°$, BD – высота, $\angle CBD = 26°$. Найдите $\angle ABC$. Ответ дайте в градусах.



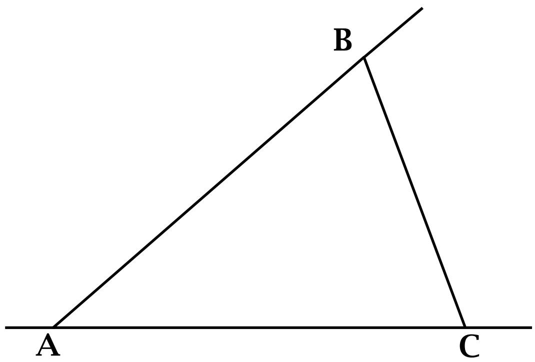
3. В треугольнике ABC: $\angle A = 39°$, BD – биссектриса, $\angle ABD = 30°$. Найдите $\angle C$. Ответ дайте в градусах.



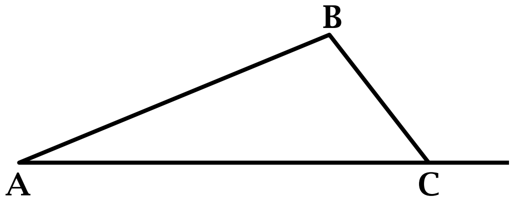
4. В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка D, на отрезке AD выбрана точка E так, что $\angle BAD = \angle ECD = \angle EAC + \angle ECA$. Внешний угол при вершине B равен $138°$. Найдите $\angle BAD$. Ответ дайте в градусах.



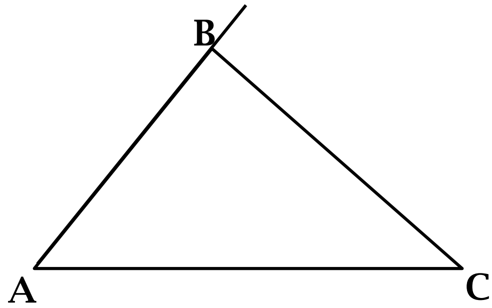
5. В треугольнике ABC при вершинах A, B и C построено по одному внешнему углу. Найдите сумму этих внешних углов. Ответ дайте в градусах.



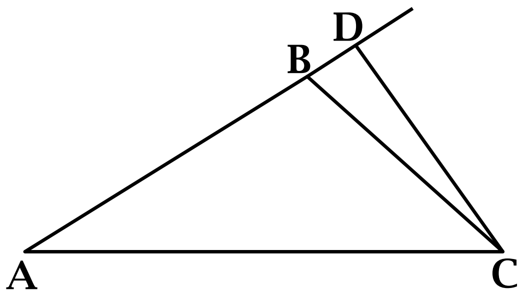
6. В треугольнике ABC: $\angle A = 22°$, внешний угол при вершине C равен $130°$. Найдите $\angle B$. Ответ дайте в градусах.



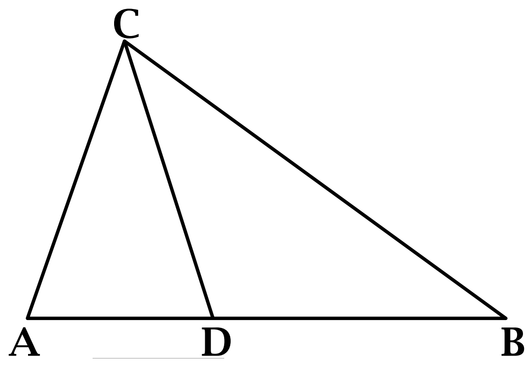
7. В треугольнике ABC: $\angle C = 35°$, внешний угол при вершине B равен $91°$. Найдите $\angle A$. Ответ дайте в градусах.



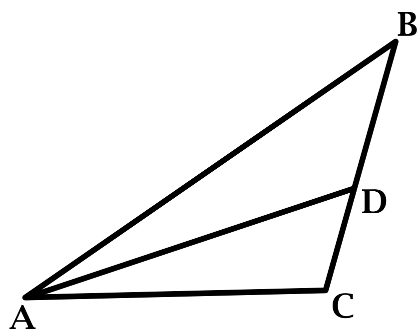
8. В треугольнике ABC: $\angle A = 27°$, CD – высота, $\angle BCD = 18°$. Найдите $\angle ACB$. Ответ дайте в градусах.



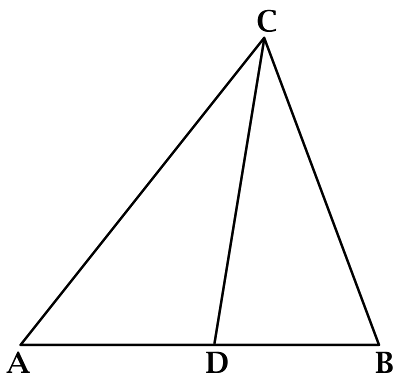
9. В треугольнике ABC: $\angle B = 27^\circ$, CD – биссектриса, $\angle ACD = 35^\circ$. Найдите $\angle A$. Ответ дайте в градусах.



10. В треугольнике ABC: AD – биссектриса, $\angle B = 27^\circ$, $\angle CAD = 18^\circ$. Найдите $\angle ADC$. Ответ дайте в градусах.



11. В треугольнике ABC: CD – биссектриса, $\angle B = 63^\circ$, $\angle ACD = 33^\circ$. Найдите $\angle ADC$. Ответ дайте в градусах.



1. **Ответ**. 106. **Решение**. Согласно теореме о внешнем угле треугольника, $\angle B + \angle C$ = внешнему углу при вершине A, следовательно $A_{\text{внеш}} = 81^\circ + 25^\circ = 106^\circ$.

2. **Ответ**. 29. **Решение**. Так как BD – высота, то $\angle ADB = 90^\circ$. Сумма углов треугольника равна 180°, тогда $\angle A + \angle ABD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

   Так как $\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD$, то $\angle ABD = \angle ABC + 26^\circ$. При этом $\angle A = 35^\circ$, тогда $35^\circ + \angle ABC + 26^\circ = 90^\circ$, откуда находим $\angle ABC = 29^\circ$.

3. **Ответ**. 81. **Решение**. Так как BD – биссектриса, то $\angle ABD = \angle DBC$, тогда $\angle ABC = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

   Сумма углов треугольника равна 180°, тогда $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle ABC = 180^\circ - 39^\circ - 60^\circ = 81^\circ$.

4. **Ответ**. 46. **Решение**. Согласно теореме о внешнем угле треугольника, внешний угол в треугольнике равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.
   $\angle ADB$ – внешний для треугольника ADC, тогда $\angle ADB = \angle EAC + \angle ECA + \angle ECD = 2 \cdot \angle ECD = 2 \cdot \angle BAD$.
   Внешний угол при вершине B равен $\angle BAD + \angle ADB = 3 \cdot \angle BAD = 138^\circ$, тогда $\angle BAD = 138^\circ : 3 = 46^\circ$.

5. **Ответ**. 360. **Решение**. Согласно теореме о внешнем угле треугольника, внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним. Тогда внешний угол при вершине A равен $\angle B + \angle C$ в треугольнике ABC.

   Аналогично внешний угол при вершине B равен $\angle A + \angle C$ в треугольнике ABC, внешний угол при вершине C равен $\angle A + \angle B$ в треугольнике ABC.

Таким образом, сумма внешних углов равна $\angle B+\angle C+\angle A+\angle C+\angle A+\angle B=2(\angle A+\angle B+\angle C)$ в треугольнике ABC, но эта сумма есть удвоенная сумма углов треугольника.

Так как сумма углов треугольника равна 180°, то сумма внешних углов равна $180^\circ\cdot 2=360^\circ$.

6. **Ответ**. 108. **Решение**. Согласно теореме о внешнем угле треугольника, $\angle A+\angle B=C_{\text{внеш}}$, тогда $22^\circ+\angle B=130^\circ$, откуда находим $\angle B=130^\circ-22^\circ=108^\circ$.

7. **Ответ**. 56. **Решение**. Согласно теореме о внешнем угле треугольника, $\angle C+\angle A=B_{\text{внеш}}$, тогда $35^\circ+\angle A=91^\circ$, откуда находим $\angle A=91^\circ-35^\circ=56^\circ$.

8. **Ответ**. 45. **Решение**. Так как CD – высота, то $\angle ADC=90^\circ$. Сумма углов треугольника равна 180°, тогда $\angle A+\angle ACD=180^\circ-90^\circ=90^\circ$.

   Так как $\angle ACD=\angle ACB+\angle BCD$, то $\angle ACD=\angle ACB+18^\circ$. При этом $\angle A=27^\circ$, тогда $27^\circ+\angle ACB+18^\circ=90^\circ$, откуда находим $\angle ACB=45^\circ$.

9. **Ответ**. 83. **Решение**. Так как CD – биссектриса, то $\angle ACD=\angle DCB$, тогда $\angle ACB=2\cdot 35^\circ=70^\circ$.

   Сумма углов треугольника равна 180°, тогда $\angle A=180^\circ-\angle B-\angle ACB=180^\circ-27^\circ-70^\circ=83^\circ$.

10. **Ответ**. 45. **Решение**. Так как AD – биссектриса, то $\angle BAD=\angle CAD$, тогда $\angle BAC=2\cdot 18^\circ=36^\circ$.

    Сумма углов треугольника равна 180°, тогда $\angle C=180^\circ-\angle B-\angle BAC=180^\circ-27^\circ-36^\circ=117^\circ$.

    $\angle CAD+\angle ADC+\angle C=180^\circ$, тогда $18^\circ+\angle ADC+117^\circ=180^\circ$, откуда находим $\angle ADC=45^\circ$.

11. **Ответ**. 96. **Решение**. Так как CD – биссектриса, то $\angle ACD = \angle DCB$, тогда $\angle ACB = 2 \cdot 33^\circ = 66^\circ$. Сумма углов треугольника равна 180°, тогда $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle ACB = 180^\circ - 63^\circ - 66^\circ = 51^\circ$. $\angle A + \angle ACD + \angle ADC = 180^\circ$, тогда $51^\circ + 33^\circ + \angle ADC = 180^\circ$, откуда находим $\angle ADC = 96^\circ$.

Определения

Треугольник называется **равнобедренным**, если две его стороны равны.
Эти стороны называются боковыми сторонами треугольника, а третья сторона – основанием.

Треугольник называется **равносторонним**, если все его стороны равны.
Равносторонний треугольник, очевидно, является и равнобедренным.

Свойство №1 равнобедренного треугольника

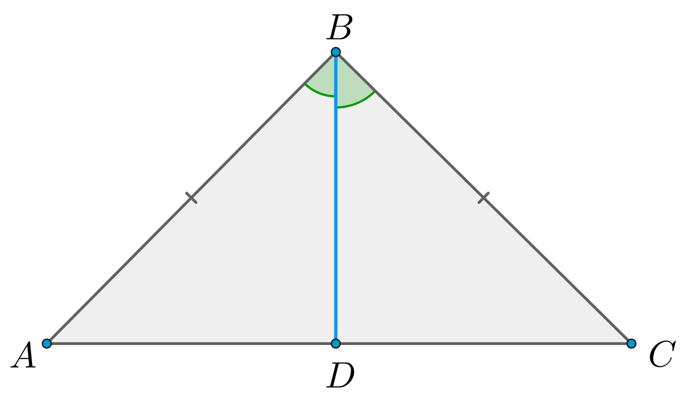
В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.

Доказательство

Пусть ABC – равнобедренный треугольник, $AB = BC$, BD – биссектриса (проведённая к основанию).

Рассмотрим треугольники ABD и BCD: $AB = BC$, $\angle ABD = \angle CBD$, BD – общая. Таким образом, $\triangle ABD = \triangle BCD$ по двум сторонам и углу между ними.

Из равенства этих треугольников следует, что $AD = DC$, следовательно, BD – медиана.



Кроме того, в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, а $AB = BC$, следовательно,

$$\angle ADB = \angle CDB, \tag{2}$$

но $\angle ADB + \angle CDB = \angle ADC$ – развёрнутый, следовательно, $\angle ADB + \angle CDB = 180^\circ$, откуда при учёте (2): $\angle ADB = 90^\circ = \angle CDB$, то есть BD – высота.

Верны и другие утверждения:
В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является биссектрисой и медианой.
В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

Свойство №2 равнобедренного треугольника
В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Доказательство
Проведем биссектрису BD (см. рисунок из предыдущей теоремы). Тогда $\triangle ABD = \triangle CBD$ по первому признаку, следовательно, $\angle A = \angle C$.

Признаки равнобедренного треугольника
1. Если в треугольнике два угла равны, то треугольник равнобедренный.

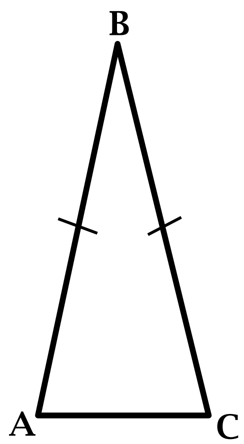
2. Если в треугольнике два из трех объектов: высота, биссектриса, медиана – совпадают, то треугольник равнобедренный.

Теорема о соотношении между сторонами и углами треугольника
В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.
В треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

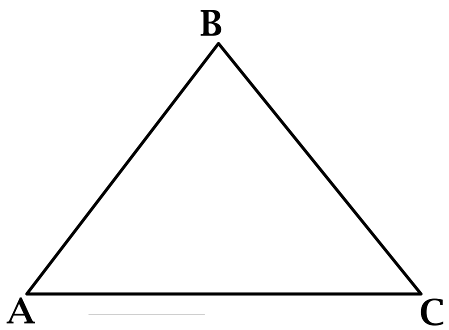
Из этого следует:
Теорема: неравенство треугольника
В треугольнике сумма любых двух сторон больше третьей стороны.

Другая формулировка: в треугольнике разность любых двух сторон меньше третьей стороны.

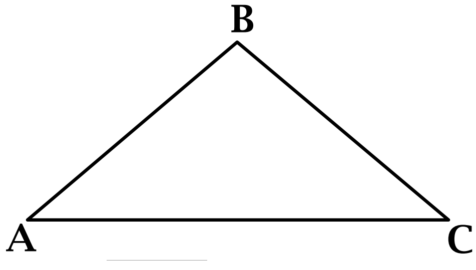
1. В треугольнике ABC: $\angle C = 70^\circ$, $AB = BC$. Найдите $\angle B$. Ответ дайте в градусах.



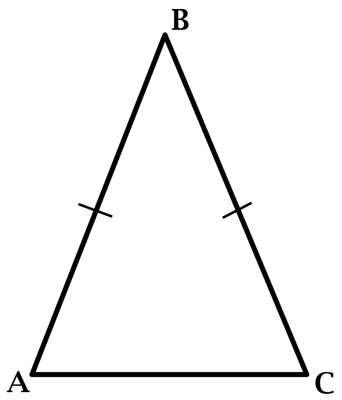
2. В треугольнике ABC: $\angle A = 47^\circ$, $AB = BC$. Найдите $\angle B$. Ответ дайте в градусах.



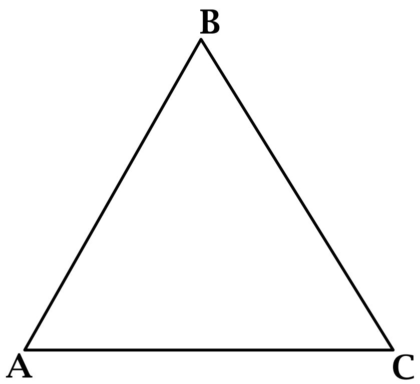
3. В треугольнике ABC: $\angle C = 36^\circ$, $AB = BC$. Найдите $\angle B$. Ответ дайте в градусах.



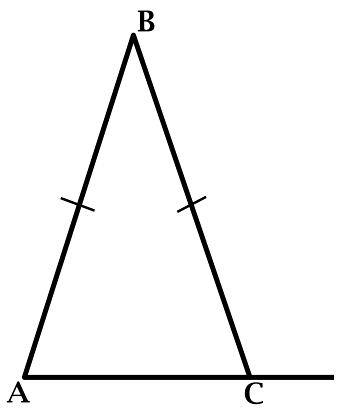
4. В треугольнике ABC: $\angle B = 38^\circ$, $AB = BC$. Найдите $\angle C$. Ответ дайте в градусах.



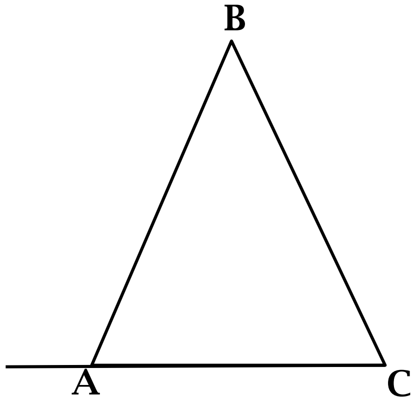
5. В треугольнике ABC: $\angle B = 73^\circ$, $AB = BC$. Найдите $\angle C$. Ответ дайте в градусах.



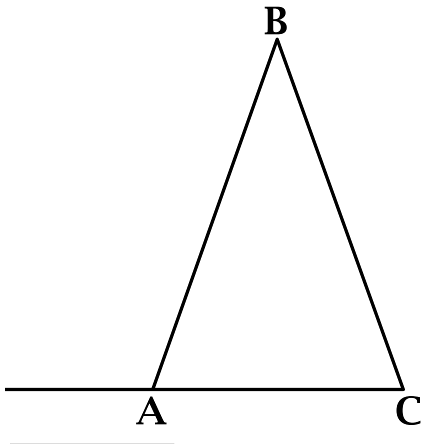
6. В треугольнике ABC: $\angle B = 32^\circ$, $AB = BC$. Найдите внешний угол при вершине C. Ответ дайте в градусах.



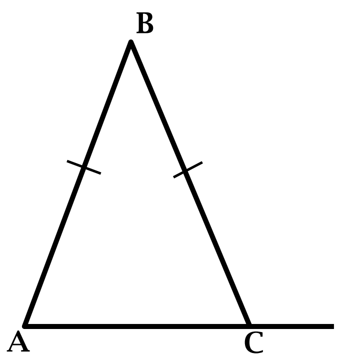
7. В треугольнике ABC: $\angle B = 50°$, $AB = BC$. Найдите внешний угол при вершине A. Ответ дайте в градусах.



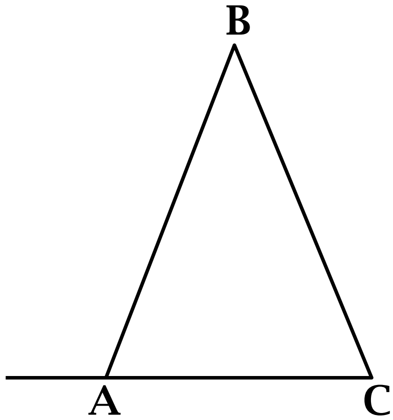
8. В треугольнике ABC: $\angle B = 39°$, $AB = BC$. Найдите внешний угол при вершине A. Ответ дайте в градусах.



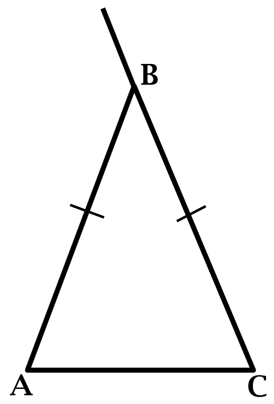
9. В треугольнике ABC: $AB = BC$, внешний угол при вершине C равен $108°$. Найдите $\angle B$. Ответ дайте в градусах.



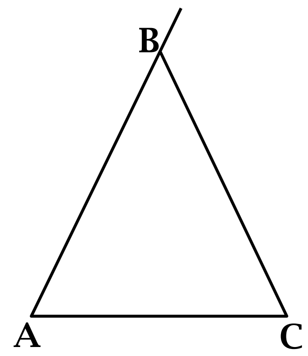
10. В треугольнике ABC: $AB = BC$, внешний угол при вершине A равен 112°. Найдите $\angle B$. Ответ дайте в градусах.



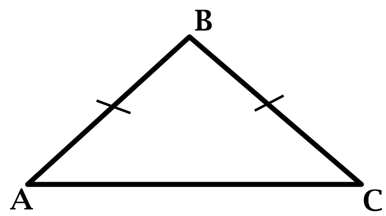
11. В треугольнике ABC: $AB = BC$, внешний угол при вершине B равен $104°$. Найдите $\angle A$. Ответ дайте в градусах.



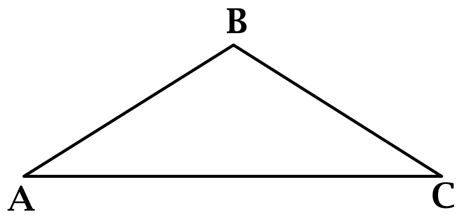
12. В треугольнике ABC: $AB = BC$, внешний угол при вершине B равен $138°$. Найдите $\angle C$. Ответ дайте в градусах.



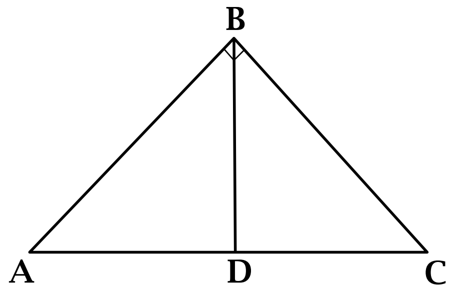
13. Один из углов равнобедренного треугольника равен $92°$. Найдите какой-нибудь другой его угол.



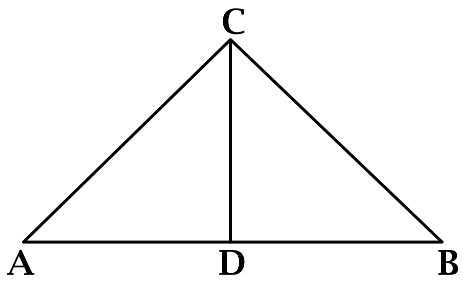
14. Один из углов равнобедренного треугольника равен 124°. Найдите какой-нибудь другой его угол.



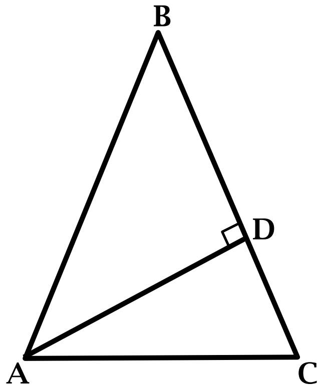
15. В треугольнике ABC: $\angle B = 90^\circ$, BD – биссектриса, $AB = BC$, $AC = 6$. Найдите BD.



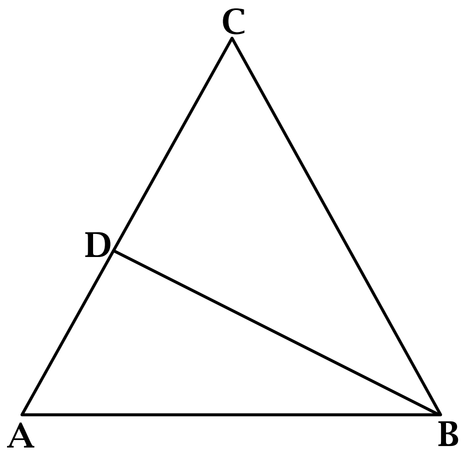
16. В треугольнике ABC: $\angle C = 90^\circ$, CD – высота, $AC = BC$, $AB = 33$. Найдите CD.



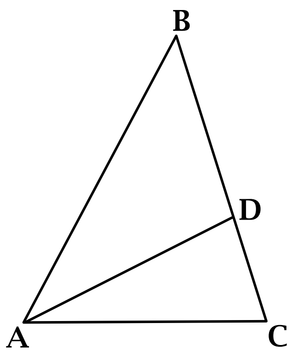
17. В треугольнике ABC: $AB = BC$, AD – высота, $\angle CAD = 19°$. Найдите $\angle B$. Ответ дайте в градусах.



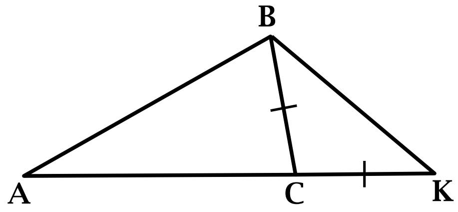
18. В треугольнике ABC: $AC = BC$, BD – высота, $\angle ABD = 25°$. Найдите $\angle C$. Ответ дайте в градусах.



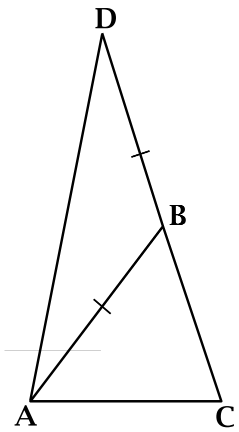
19. В треугольнике ABC: AD – биссектриса, $AC = AD = BD$. Найдите наименьший угол в треугольнике ABC. Ответ дайте в градусах.



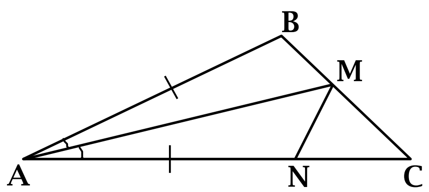
20. В треугольнике ABC: $\angle A = 32°$, $\angle B = 70°$. На продолжении стороны AC за точку C отложен отрезок $CK = BC$. Найдите $\angle K$ треугольника BCK. Ответ дайте в градусах.



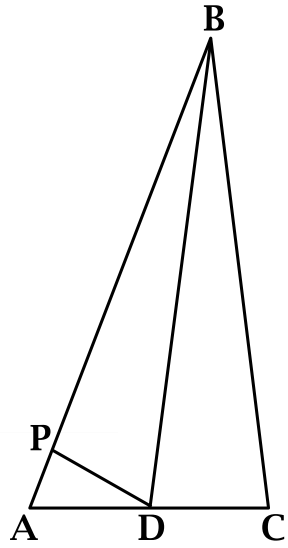
21. В треугольнике ABC: $\angle A = 52°$, $\angle C = 71°$. На продолжении стороны BC за точку B отложен отрезок $BD = AB$. Найдите $\angle D$ треугольника ABD. Ответ дайте в градусах.



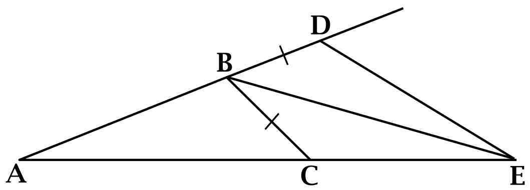
22. В треугольнике ABC: $\angle C = 40°$, $\angle B = 110°$, AM – биссектриса, N – такая точка на AC, что $AB = AN$. Найдите $\angle CMN$. Ответ дайте в градусах.



23. В треугольнике ABC: $\angle A = 51^\circ$, $\angle C = 77^\circ$, BD – биссектриса, P – такая точка на AB, что $PB = BC$. Найдите $\angle ADP$. Ответ дайте в градусах.



24. В треугольнике ABC: $\angle A = 22^\circ$, $\angle C = 40^\circ$, BE – биссектриса внешнего угла при вершине B, при этом точка E лежит на продолжении стороны AC. На продолжении стороны AB за точку B выбрана точка D, таким образом, что $BC = BD$. Найдите $\angle CED$. Ответ дайте в градусах.



1. **Ответ**. 40. **Решение**. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle A = \angle C = 70°$. Так как у любого треугольника сумма углов равна $180°$, то $\angle B = 180° - 70° - 70° = 40°$.

2. **Ответ**. 86. **Решение**. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle C = \angle A = 47°$. Так как у любого треугольника сумма углов равна $180°$, то $\angle B = 180° - 47° - 47° = 86°$.

3. **Ответ**. 108. **Решение**. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle A = \angle C = 36°$. Так как у любого треугольника сумма углов равна $180°$, то $\angle B = 180° - 36° - 36° = 108°$.

4. **Ответ**. 71. **Решение**. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle A = \angle C$. Так как у любого треугольника сумма углов равна $180°$, то $180° = 38° + \angle A + \angle C = 38° + 2 \cdot \angle A$, откуда $2 \cdot \angle A = 142°$, тогда $\angle A = 71°$.

5. **Ответ**. 53,5. **Решение**. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle A = \angle C$. Так как у любого треугольника сумма углов равна $180°$, то $180° = 73° + \angle A + \angle C = 73° + 2 \cdot \angle A$, откуда $2 \cdot \angle A = 107°$, тогда $\angle A = 53,5°$.

6. **Ответ**. 106. **Решение**. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle A = \angle ACB$. Так как у любого треугольника сумма углов равна $180°$, то $180° = 32° + \angle A + \angle C = 32° + 2\angle A$, откуда $2\angle A = 148°$, тогда $\angle A = 74°$.

   По теореме о внешнем угле треугольника $C_{\text{внеш}} = \angle A + \angle B$, тогда искомый угол равен $32° + 74° = 106°$.

7. **Ответ**. 115. **Решение**. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle BAC = \angle C$. Так как у любого треугольника сумма углов равна $180°$, то $180° = 50° + \angle A + \angle C = 50° + 2\angle C$,

откуда $2\angle C = 130^\circ$, тогда $\angle C = 65^\circ$.

По теореме о внешнем угле треугольника $A_{\text{внеш}} = \angle B + \angle C$, тогда искомый угол равен $50^\circ + 65^\circ = 115^\circ$.

8. **Ответ**. 109,5. **Решение**. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle BAC = \angle C$. Так как у любого треугольника сумма углов равна 180°, то $180^\circ = 39^\circ + \angle A + \angle C = 39^\circ + 2\angle C$, откуда $2\angle C = 141^\circ$, тогда $\angle C = 70,5^\circ$.

   По теореме о внешнем угле треугольника $A_{\text{внеш}} = \angle B + \angle C$, тогда искомый угол равен $39^\circ + 70,5^\circ = 109,5^\circ$.

9. **Ответ**. 36. **Решение**. Так как градусная мера развёрнутого угла равна 180°, то $\angle ACB = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.

   В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle A = \angle ACB = 72^\circ$.

   Так как у любого треугольника сумма углов равна 180°, то $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle ACB = 36^\circ$.

10. **Ответ**.
    44. **Решение**. Так как градусная мера развёрнутого угла равна 180°, то $\angle BAC = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$.

    В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle C = \angle BAC = 68^\circ$.

    Так как у любого треугольника сумма углов равна 180°, то $\angle B = 180^\circ - \angle BAC - \angle C = 44^\circ$.

11. **Ответ**. 52. **Решение**. Согласно теореме о внешнем угле треугольника, $\angle A + \angle C = 104^\circ$.

    В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle A = \angle C$.

    Таким образом, $\angle A = 104^\circ : 2 = 52^\circ$.

12. **Ответ**. 69. **Решение**. Согласно теореме о внешнем угле треугольника, $\angle A + \angle C = 138°$.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle A = \angle C$.

Таким образом, $\angle C = 138° : 2 = 69°$.

13. **Ответ**. 44. **Решение**. Сумма углов треугольника равна 180°. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Пусть 92° – один из углов при основании, тогда сумма углов при основании равна $92° + 92° = 184° > 180°$ – противоречие, значит, 92° – угол при вершине.

Сумма углов при основании равна $180° - 92° = 88°$. Так как углы при основании равны, то оба они по $88° : 2 = 44°$.

14. **Ответ**. 28. **Решение**. Сумма углов треугольника равна 180°. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Пусть 124° – один из углов при основании, тогда сумма углов при основании равна $124° + 124° = 248° > 180°$ – противоречие, значит, 124° – угол при вершине.

Сумма углов при основании равна $180° - 124° = 56°$. Так как углы при основании равны, то оба они по $56° : 2 = 28°$.

15. **Ответ**. 3. **Решение**. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой, тогда $DC = 0,5 \cdot AC = 3$.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle DCB = \angle BAC = 90° : 2 = 45°$.

Так как BD – биссектриса, то $\angle DBC == \frac{1}{2}\angle ABC = 45°$, то есть в треугольнике DBC углы при основании BC равны, тогда треугольник DBC – равнобедренный и $BD = BC = 3$.

16. **Ответ**. 16,5. **Решение**. В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, является биссектрисой и медианой, тогда $BD = 0,5 \cdot AB = 16,5$.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle DBC = \angle BAC = 90^\circ : 2 = 45^\circ$.

Так как CD – биссектриса, $\angle DCB = 45^\circ$, то есть в треугольнике DCB углы при основании BC равны, тогда треугольник DCB – равнобедренный и $CD = BD = 16,5$.

17. **Ответ**. 38. **Решение**. Так как AD – высота, то $\angle CDA = 90^\circ$, тогда $\angle CAD + \angle C = 90^\circ$. $\angle CAD = 19^\circ$, тогда $\angle C = 71^\circ$.

    В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle CAB = \angle C = 71^\circ$. Сумма углов треугольника равна 180°, тогда $\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle CAB = 180^\circ - 71^\circ - 71^\circ = 38^\circ$.

18. **Ответ**. 50. **Решение**. Так как BD – высота, то $\angle ADB = 90^\circ$, тогда $\angle A + \angle ABD = 90^\circ$. $\angle ABD = 25^\circ$, тогда $\angle A = 65^\circ$.

    В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle CBA = \angle A = 65^\circ$. Сумма углов треугольника равна 180°, тогда $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle CBA = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ$.

19. **Ответ**. 36. **Решение**. У равнобедренного треугольника углы при основании равны. Так как $AC = AD = BD$, то $\angle ADC = \angle C$, $\angle B = \angle BAD$.

    Согласно теореме о внешнем угле треугольника, $\angle ADC = \angle B + \angle BAD = 2 \cdot \angle B$, тогда $\angle C = 2 \cdot \angle B > \angle B$. $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = \angle B + \angle DAC > \angle B$. Таким образом, $\angle B$ – наименьший.

    Так как AD – биссектриса, то $\angle BAC = 2 \cdot \angle BAD = 2 \cdot \angle B$.

    Итого: $\angle C = 2 \cdot \angle B$, $\angle BAC = 2 \cdot \angle B$, значит, $\angle BAC + \angle B + \angle C = 5 \cdot \angle B$. Так как сумма углов в треугольнике равна 180°, то $5 \cdot \angle B = 180^\circ$, откуда находим $\angle B = 36^\circ$.

20. **Ответ**. 39. **Решение**. У равнобедренного треугольника углы при основании равны. Так как $CK = BC$, то $\angle CBK = \angle K$.

    Согласно теореме о внешнем угле треугольника, $\angle BCK = \angle A + \angle ABC = 32^\circ + 70^\circ = 102^\circ$.

    Так как сумма углов в треугольнике равна 180°, то $\angle BCK + \angle CBK + \angle K = 180^\circ$, но $\angle CBK = \angle K$, тогда $102^\circ + 2 \cdot \angle K = 180^\circ$, откуда находим $\angle K = 39°$.

21. **Ответ**. 28,5. **Решение**. У равнобедренного треугольника углы при основании равны. Так как $AB = BD$, то $\angle BAD = \angle D$.

    Согласно теореме о внешнем угле треугольника, $\angle ABD = \angle C + \angle BAC = 71° + 52° = 123°$.

    Так как сумма углов в треугольнике равна $180°$, то $\angle D + \angle BAD + \angle ABD = 180°$, но $\angle BAD = \angle D$, тогда $2 \cdot \angle D + \angle ABD = 180°$, откуда находим $\angle D = 28,5°$.

22. **Ответ**. 70. **Решение**. Сумма углов треугольника равна $180°$, тогда $\angle BAC = 180° - \angle B - \angle C = 180° - 110° - 40° = 30°$. Так как AM – биссектриса, то $\angle MAN = \cdot \angle BAM = 15°$.

    Треугольники ABM и ANM равны по двум сторонам и углу между ними, тогда $\angle BMA = \angle AMN$. $\angle BMA = 180° - \angle BAM - \angle B = 180° - 15° - 110° = 55°$, тогда $\angle BMN = 2 \cdot \angle BMA = 110°$. Тогда $\angle CMN = 180° - 110° = 70°$.

23. **Ответ**. 26. **Решение**. Сумма углов в треугольнике равна $180°$, тогда $\angle ABC = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 51° - 77° = 52°$. Так как BD – биссектриса, то $\angle CBD = 0,5 \cdot \angle ABC = 26°$.

    Треугольники PBD и CBD равны по двум сторонам и углу между ними, тогда $\angle PDB = \angle CDB$. $\angle CDB = 180° - \angle CBD - \angle C = 180° - 26° - 77° = 77°$, тогда $\angle PDC = 2 \cdot \angle CDB = 154°$. Тогда $\angle ADP = 180° - 154° = 26°$.

24. **Ответ**. 18. **Решение**. Согласно теореме о внешнем угле треугольника, $\angle CBD = \angle A + \angle ACB = 22° + 40° = 62°$.

    Так как BE – биссектриса $\angle CBD$, то $\angle CBE = 0,5 \cdot \angle CBD = 31°$.

    $\angle BCE = 180° - \angle ACB = 140°$.

    Так как сумма углов в треугольнике равна $180°$, то $\angle BEC = 180° - \angle CBE - \angle BCE = 9°$.

    Треугольники BCE и BDE равны по двум сторонам и углу между ними, тогда $\angle CED = 2 \cdot \angle BEC = 18°$.

Определения

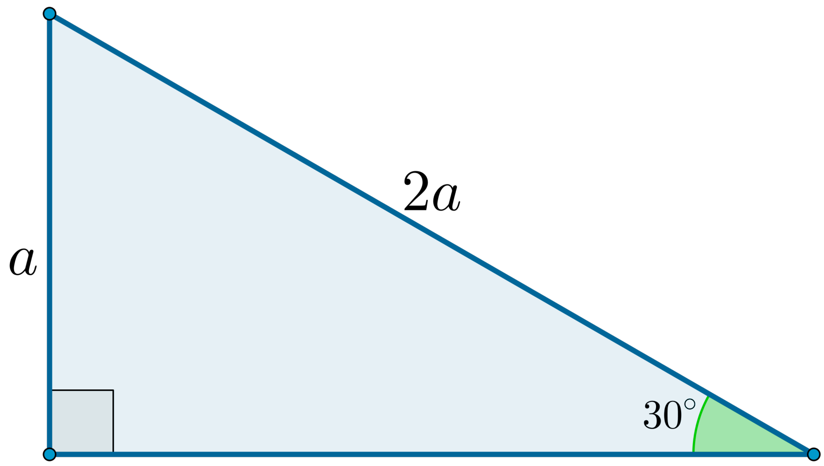
В прямоугольном треугольнике большая сторона (то есть сторона, лежащая напротив прямого угла) называется гипотенузой.
Две другие стороны называются катетами.

Свойства прямоугольного треугольника

1. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$.

2. В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла $30°$, равен половине гипотенузы.

3. Верно и обратное: если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла $30°$.



Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. Если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.
(следует из первого признака равенства треугольников)

2. Если катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и гипотенузе другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

(следует из четвертого признака равенства треугольников)

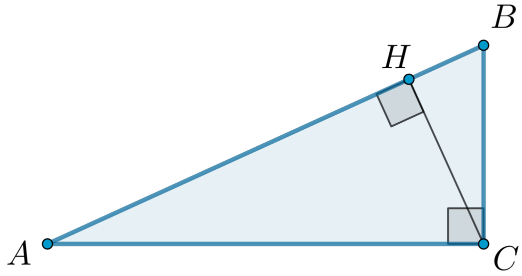
3. Если катет и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.
(следует из второго признака равенства треугольников)

4. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.
(следует из второго признака равенства треугольников)

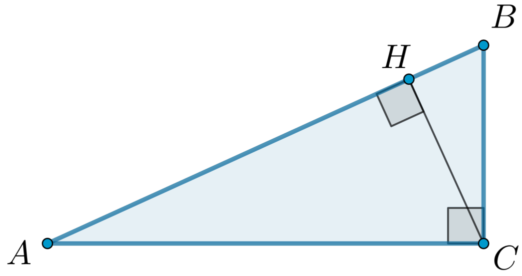
Замечание
Таким образом, прямоугольные треугольники равны по равенству любых двух элементов (не считая прямого угла) этих треугольников, причем хотя бы один из них – сторона.

Теорема Пифагора
В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

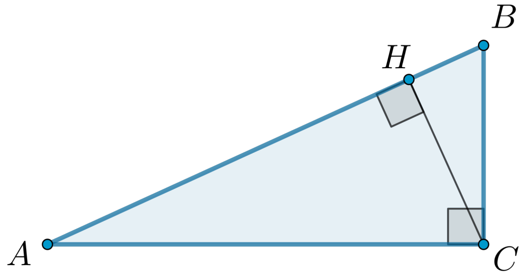
1. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $30°$, $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH.



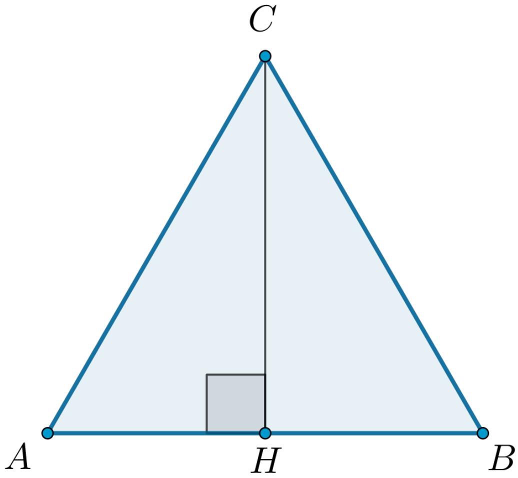
2. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH – высота, угол A равен $30°$. Найдите AH, если $AB = 2$.



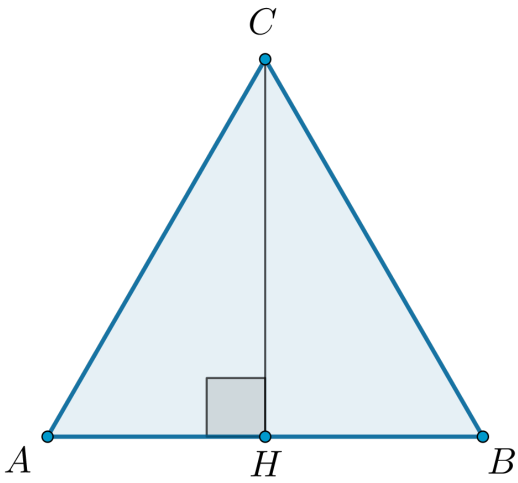
3. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH – высота, угол A равен $30°$. Найдите BH, если $AB = 4$.



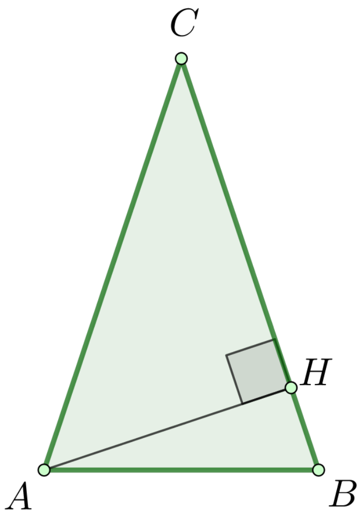
4. В треугольнике ABC $AB = BC = AC = 2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH.



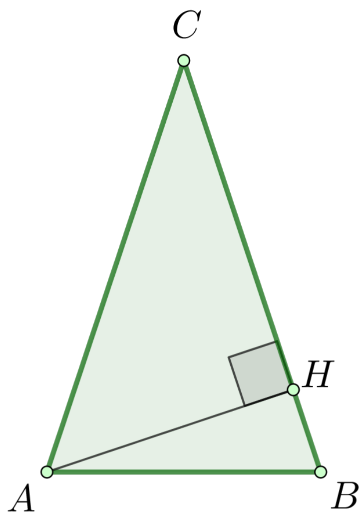
5. В равностороннем треугольнике ABC высота CH равна $2\sqrt{3}$. Найдите AB.



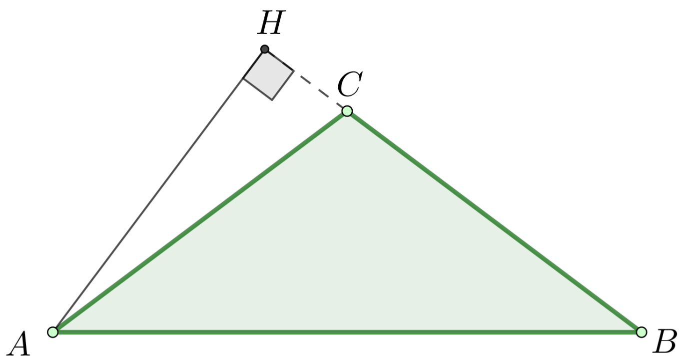
6. В треугольнике ABC $AC = BC = 4$, $\angle C = 30°$. Найдите высоту AH.



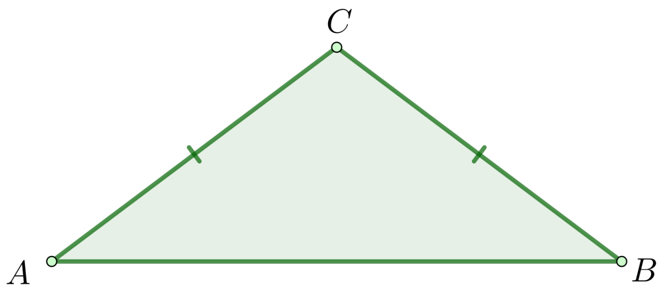
7. В треугольнике ABC $AC = BC$, высота AH равна 4, угол C равен $30°$. Найдите BC.



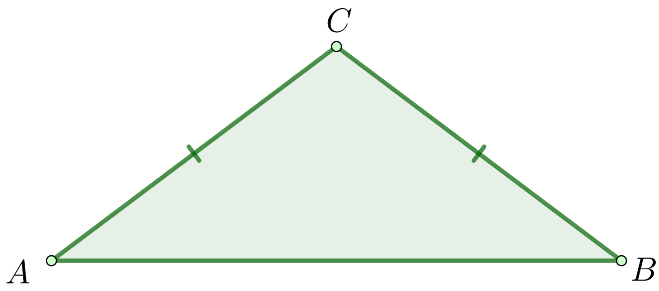
8. В треугольнике ABC $AC = BC = 2\sqrt{3}$, $\angle C = 120°$. Найдите высоту AH.



9. В треугольнике ABC $AC = BC$, $\angle C = 120^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите AC.



10. В треугольнике ABC $AC = BC$, $\angle C = 120^\circ$, $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите AB.



1. **Ответ**. 1,5. **Решение**. Так как катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы, то $BC = 0,5AB = \sqrt{3}$.
По свойству прямоугольного треугольника $\angle BCH = \angle A = 30^\circ$, следовательно, из $\triangle BCH$: $HB = 0,5BC = \sqrt{3} : 2$.
Тогда по теореме Пифагора из $\triangle BCH$:
$$CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = 1,5$$

2. **Ответ**. 1,5. **Решение**. Так как катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы, то $BC = 0,5AB = 1$.
Тогда по теореме Пифагора из $\triangle ABC$:
$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{3}$$
Из прямоугольного $\triangle AHC$: $HC = 0,5AC = \sqrt{3} : 2$. Тогда по теореме Пифагора
$$AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = 1,5$$

3. **Ответ**. 1. **Решение**. Так как катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы, то $BC = 0,5AB = 2$.
По свойству прямоугольного треугольника $\angle BCH = \angle A = 30^\circ$, следовательно, из $\triangle BCH$: $HB = 0,5BC = 1$.

4. **Ответ**. 3. **Решение**. Так как $AC = BC$, то CH также является медианой, следовательно, $AH = 0,5AB = \sqrt{3}$. Тогда по теореме Пифагора из $\triangle ACH$:
$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = 3$$

5. **Ответ**. 4. **Решение**. Так как $AC = BC$, то CH также является медианой. Следовательно, если $AH = a$, то $AB = AC = 2a$. Тогда по теореме Пифагора из $\triangle ACH$:
$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \quad \Rightarrow \quad 4a^2 = a^2 + 12 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \quad \Rightarrow \quad AB = 2a =$$

6. **Ответ**. 2. **Решение**. Рассмотрим прямоугольный $\triangle ACH$. Катет, лежащий против угла $30°$, равен половине гипотенузы, следовательно, $AH = 0,5AC = 2$.

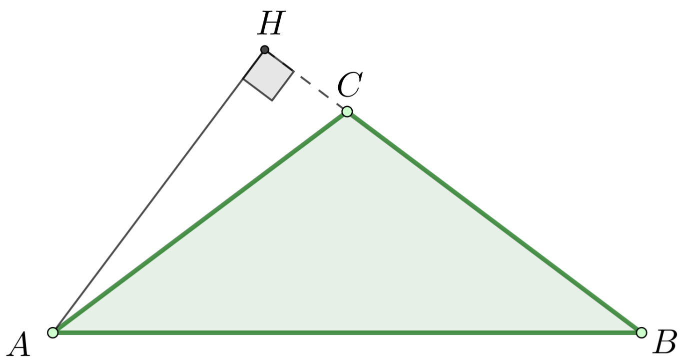
Заметим, что условие $BC = 4$ в данной задаче является лишним.

7. **Ответ**. 8. **Решение**. Рассмотрим прямоугольный $\triangle ACH$. Катет, лежащий против угла $30°$, равен половине гипотенузы, следовательно, $4 = AH = 0,5AC$, откуда $8 = AC = BC$.

8. **Ответ**. 3. **Решение**. Рассмотрим прямоугольный $\triangle ACH$. Так как $\angle ACB = 120°$, то $\angle ACH = 180° - 120° = 60°$. Следовательно, $\angle HAC = 90° - 60° = 30°$. Катет, лежащий против угла $30°$, равен половине гипотенузы, следовательно, $HC = 0,5AC = \sqrt{3}$. Тогда по теореме Пифагора

$$AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = 3$$

9. **Ответ**. 2. **Решение**. Рассмотрим прямоугольный $\triangle AHB$.

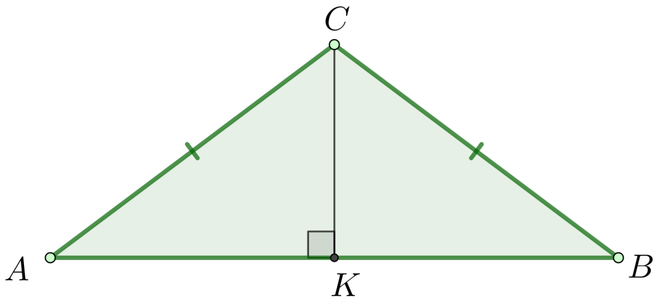


Так как $\angle C = 120°$ и $AC = CB$, то $\angle B = (180° - 120°) : 2 = 30°$. Катет, лежащий против угла $30°$, равен половине гипотенузы, следовательно, $HA = 0,5AB = \sqrt{3}$.

Рассмотрим прямоугольный $\triangle ACH$. Так как $\angle ACB = 120°$, то $\angle ACH = 180° - 120° = 60°$. Следовательно, $\angle HAC = 90° - 60° = 30°$. Следовательно, $HC = 0,5AC$. Тогда по теореме Пифагора

$$AC^2 = HC^2 + HA^2 \quad \Rightarrow \quad AC^2 = \frac{AC^2}{4} + 3 \quad \Rightarrow \quad AC = 2$$

10. **Ответ**. 6. **Решение**. Проведем $CK \perp AB$:



Так как $\triangle ABC$ равнобедренный, то CK также является медианой и биссектрисой, следовательно, $AK = 0,5AB$ и $\angle ACK = 60°$. Тогда $\angle CAK = 90° - 60° = 30°$. Катет, лежащий против угла $30°$, равен половине гипотенузы, то есть $CK = 0,5AC = \sqrt{3}$. Тогда по теореме Пифагора:

$$AK = \sqrt{AC^2 - CK^2} = 3 \quad \Rightarrow \quad AB = 2AK = 6$$

Урок 7. Основные важные факты о биссектрисе, медиане, высоте и серединном перпендикуляре.
Часть 1

Напомним еще раз основные определения.

Определения

Медиана треугольника – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Биссектриса треугольника – это отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны.

Высота треугольника – это перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.

Серединный перпендикуляр к отрезку – прямая, проходящая через середину отрезка перпендикулярно ему.

Расстояние между двумя точками – это длина отрезка с концами в этих точках.

Расстояние от точки до прямой – это длина перпендикуляра, проведенного из данной точки к прямой.

Теоремы (ГМТ биссектрисы)

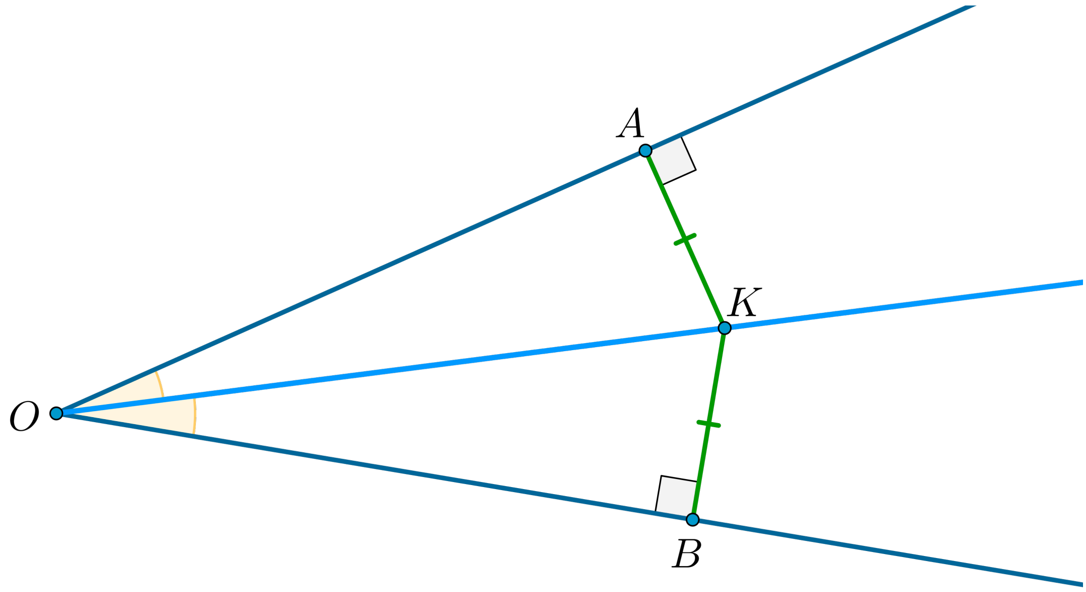
1. Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от сторон угла.

2. Если точка равноудалена от сторон угла, то она лежит на его биссектрисе.

Доказательство

1) Докажем, что если $KA = KB$, то OK – биссектриса.
Рассмотрим треугольники AOK и BOK: они равны по катету и гипотенузе, следовательно, $\angle AOK = \angle BOK$, чтд.

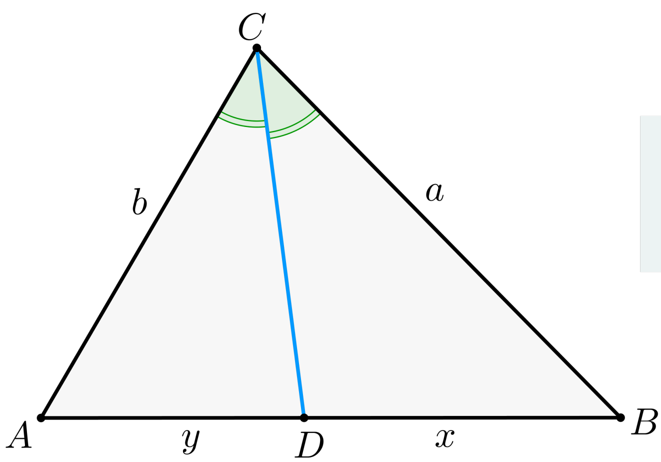
2) Докажем, что если OK – биссектриса, то $KA = KB$.



Аналогично треугольники AOK и BOK равны по гипотенузе и острому углу, следовательно, $KA = KB$, чтд.

Теорема о пересечении биссектрис
Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Теоремы
1. Биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам:



$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

2. Верно и обратное: если отрезок, проведенный из вершины треугольника к стороне, делит эту сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, то это биссектриса.

Теоремы (ГМТ серединного перпендикуляра)

1. Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов отрезка.

2. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к нему.

Теорема о пересечении серединных перпендикуляров

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Теорема о пересечении высот или их продолжений

Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.

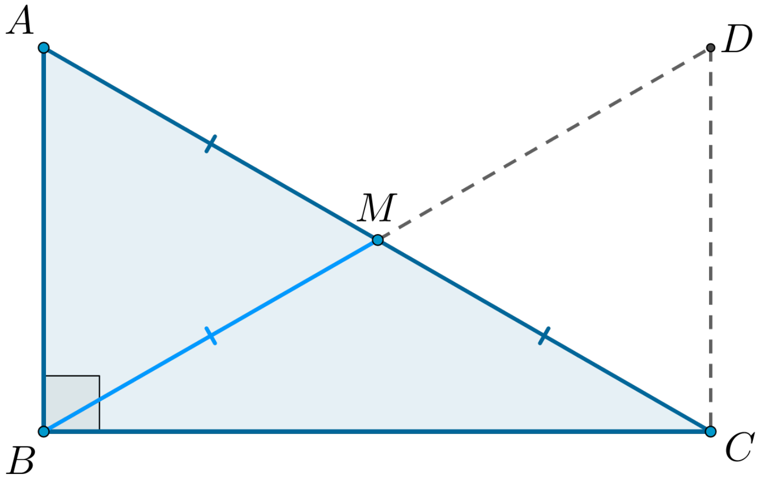
Теоремы

1. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

2. Верно и обратное: если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то она проведена из вершины прямого угла.

Доказательство

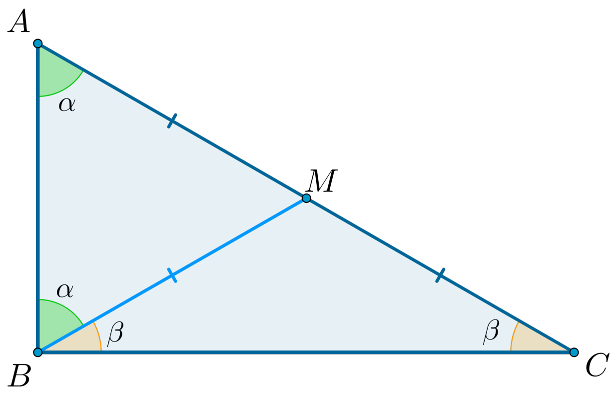
1) Докажем, что если $\triangle ABC$ – прямоугольный, то $BM = \frac{1}{2}AC$, где M – середина гипотенузы AC.



Проведем $CD \parallel AB$, причем D – точка пересечения прямой CD

с прямой BM. Тогда $\angle DCB = 90^\circ$, $\angle AMB = \angle DMC$ как вертикальные, $\angle ABM = \angle MDC$ как накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей BD. Следовательно, по стороне и двум углам $\triangle AMB = \triangle DMC$. Отсюда $BM = MD$ и $AB = CD$. Но тогда $\triangle ABC = \triangle BCD$ по двум катетам: BC – общий, $AB = CD$. Следовательно, $AC = BD$. Так как AM – половина AC, BM – половина BD, то $AM = BD$, чтд.

2) Докажем, что если в треугольнике ABC медиана $BM = AM = MC$, то $\angle B = 90^\circ$.



Треугольники AMB и CMB – равнобедренные, следовательно, $\angle BAM = \angle ABM = \alpha, \quad \angle MBC = \angle MCB = \beta$.

Т.к. сумма углов в треугольнике равна 180°, то для $\triangle ABC$:

$\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \angle B = 90^\circ$, чтд.

Теорема

В любом треугольнике медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины.

Теорема о пересечении медиан

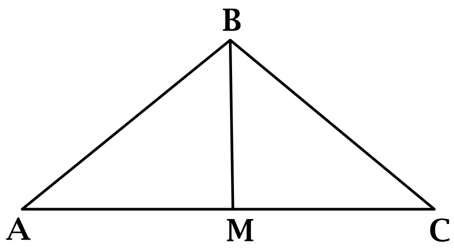
Медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство

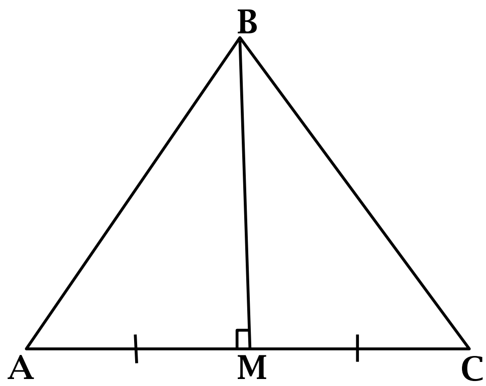
Проведем медианы AD и BE. Пусть они пересекаются в точке O.

Из предыдущей теоремы следует, что $AO : OD = 2 : 1$. Проведем медиану CM. Так как по предыдущей теореме она делит медиану AD в отношении $2 : 1$, считая от вершины A, то медиана CM проходит через точку O. Таким образом, все медианы треугольника пересекаются в одной точке.

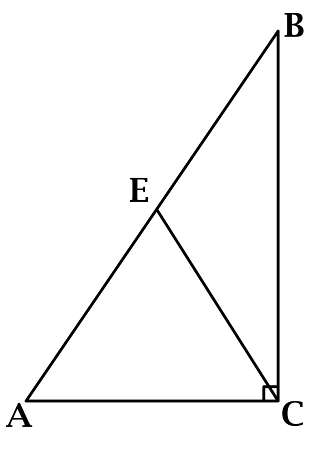
1. В треугольнике ABC: $AB = BC$, BM – биссектриса, $AC = 5$. Найдите AM.



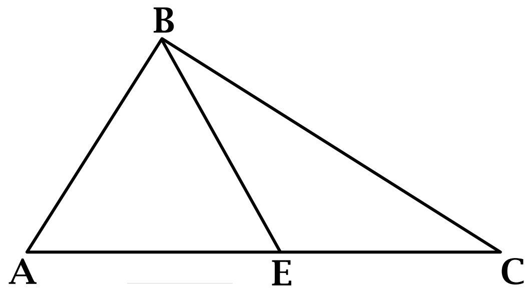
2. В треугольнике ABC: BM – высота, причем $AM = MC$, $\angle ABM = 28°$. Найдите $\angle ABC$. Ответ дайте в градусах.



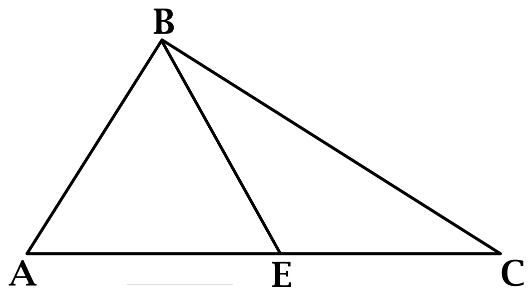
3. В треугольнике ABC: $\angle C = 90°$, CE – медиана, $\angle ACE = 50°$. Найдите $\angle B$. Ответ дайте в градусах.



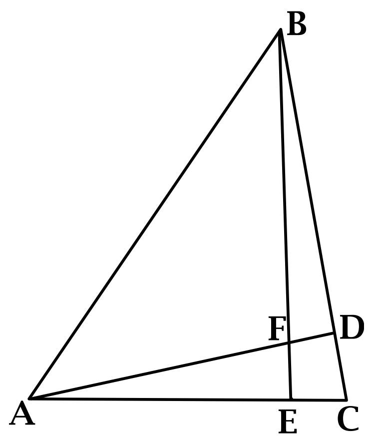
4. В треугольнике ABC: $\angle B = 90°$, BE – медиана, $\angle CBE = 25°$. Найдите $\angle AEB$. Ответ дайте в градусах.



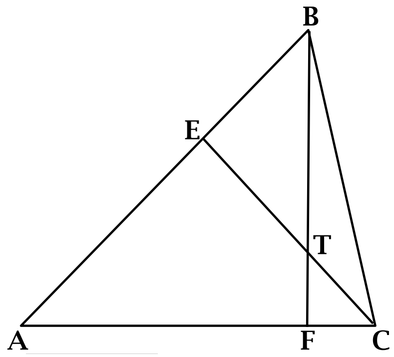
5. В треугольнике ABC: $\angle B = 90°$, BE – медиана, $\angle CBE = 22°$. Найдите $\angle BAC$. Ответ дайте в градусах.



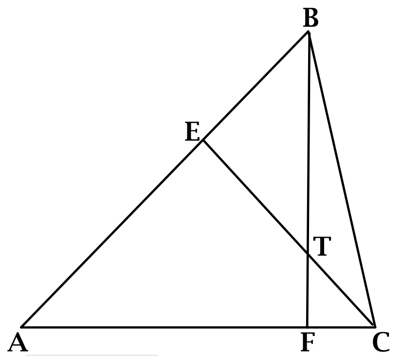
6. В треугольнике ABC: AD и BE – высоты, пересекающиеся в точке F, $\angle EFD = 104°$. Найдите $\angle C$. Ответ дайте в градусах.



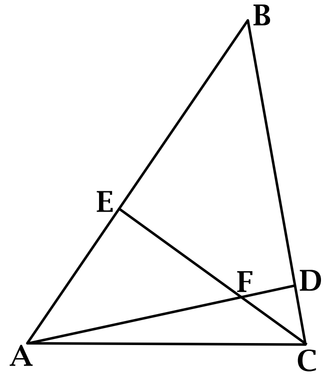
7. В треугольнике ABC: CE и BF – высоты, пересекающиеся в точке T, $\angle CTB = 152°$. Найдите $\angle A$. Ответ дайте в градусах.



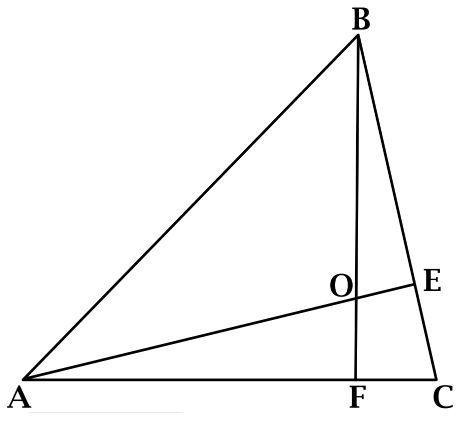
8. В треугольнике ABC: CE и BF – высоты, пересекающиеся в точке T, $\angle ETB = 31°$. Найдите $\angle A$. Ответ дайте в градусах.



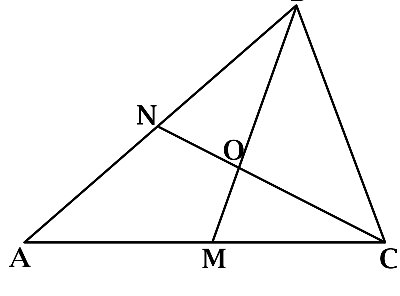
9. В треугольнике ABC: $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 80^\circ$, AD и CE – высоты, пересекающиеся в точке F. Найдите $\angle EFD$. Ответ дайте в градусах.



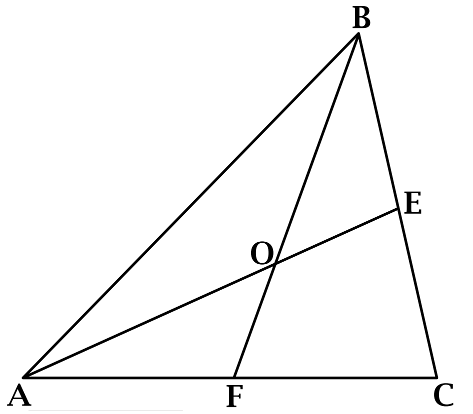
10. В треугольнике ABC: AE и BF – высоты, пересекающиеся в точке O, $\angle FBC = 19^\circ$. Найдите $\angle FOE$. Ответ дайте в градусах.



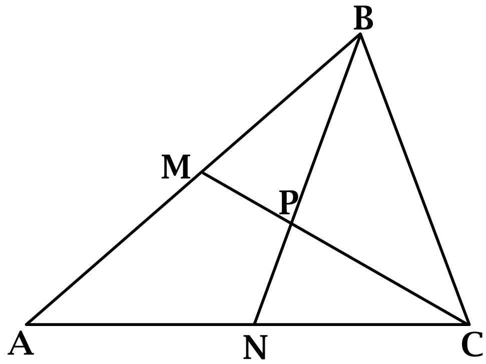
11. В треугольнике ABC: BM и CN – медианы, $BM = CN$, O – точка пересечения BM и CN, $\angle OBC = 36^\circ$. Найдите $\angle BOC$. Ответ дайте в градусах.



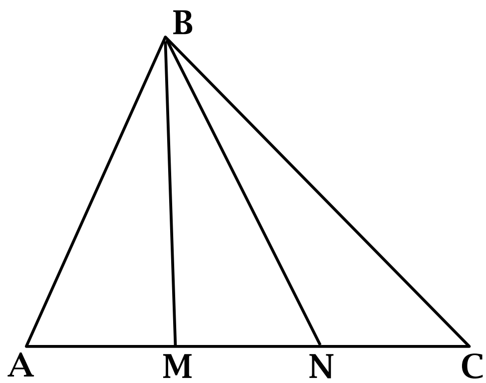
12. В треугольнике ABC: BF и AE – медианы, $AE = BF$, O – точка пересечения BF и AE, $\angle FOE = 147^\circ$. Найдите $\angle ABO$. Ответ дайте в градусах.



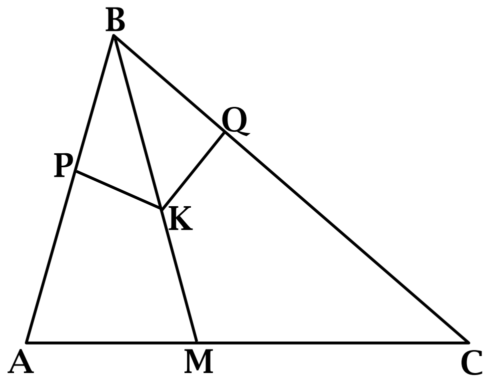
13. В треугольнике ABC: BN и CM – медианы, P – точка пересечения BN и CM, $\angle PBC = 35^\circ$, $\angle BPC = 110^\circ$, $AB = 4$. Найдите NC.



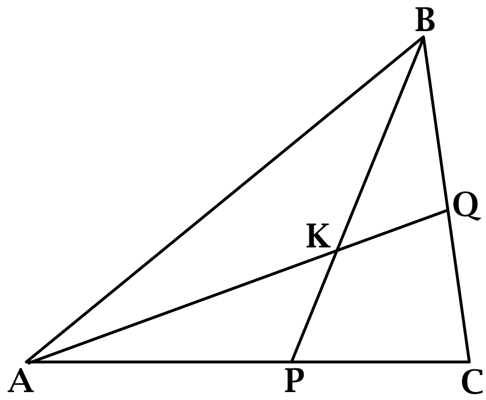
14. В треугольнике ABC на стороне AC отмечены точки M и N так, что M – середина AN, а BN – медиана в треугольнике BMC. Во сколько раз AC длиннее, чем MN?



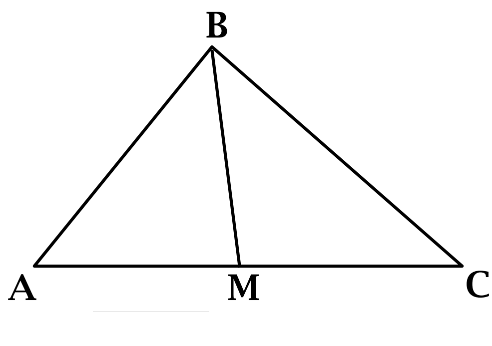
15. В треугольнике ABC: BM – биссектриса, на сторонах AB и BC выбраны точки P и Q соответственно, причём перпендикуляр к AB, проходящий через точку P и перпендикуляр к BC, проходящий через точку Q, пересеклись в точке K, лежащей на биссектрисе BM. Найдите PK, если известно, что $KQ = 33$.



16. В треугольнике ABC: BP и AQ – биссектрисы, пересекающиеся в точке K, $\angle C = 75°$. Найдите $\angle PKQ$. Ответ дайте в градусах.



17. В треугольнике ABC: BM – биссектриса, причем $AM = 3$, $MC = 5$, $BC = 10$. Найдите AB.



1. **Ответ**. 2,5. **Решение**. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой, тогда BM – медиана и $AM = MC$. Таким образом, $5 = AC = AM + MC = 2 \cdot AM$, откуда находим $AM = 2,5$.

2. **Ответ**. 56. **Решение**. в треугольниках ABM и BMC:
   $AM = MC$,
   $\angle AMB = \angle BMC$,
   MB – общая,
   тогда треугольники ABM и BMC равны по двум сторонам и углу между ними и, значит, $AB = BC$, то есть треугольник ABC – равнобедренный. В равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является биссектрисой и высотой, значит $\angle MBC = \angle ABM = 28°$, тогда $\angle ABC = 2 \cdot \angle ABM = 56°$.

3. **Ответ**. 40. **Решение**. $\angle ECB = \angle ACB - \angle ACE = 40°$. В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы, тогда $CE = BE$, значит треугольник CEB – равнобедренный. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle B = \angle ECB = 40°$.

4. **Ответ**. 50. **Решение**. В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы, тогда $CE = BE$, значит треугольник CEB – равнобедренный. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle C = \angle CBE = 25°$.
   Так как внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника не смежных с ним, то $\angle AEB = \angle C + \angle CBE = 50°$.

5. **Ответ**. 68. **Решение**. В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы, тогда $AE = BE$, значит треугольник AEB – равнобедренный. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle A = \angle ABE$.

Так как $\angle B = 90°$, $\angle CBE = 22°$, то $\angle ABE = 90° - 22° = 68°$, откуда $\angle BAC = 68°$.

6. **Ответ**. 76. **Решение**. $\angle AFE = 180° - \angle EFD = 76°$, тогда $\angle FAE = 90° - \angle AFE = 14°$ (так как $\angle FEA = 90°$). Треугольник ADC – прямоугольный. $\angle C = 90° - \angle FAE = 76°$.

7. **Ответ**. 28. **Решение**. $\angle FTC = 180° - \angle CTB = 28°$, тогда $\angle TCF = 90° - \angle FTC = 62°$ (так как $\angle TFC = 90°$). Треугольник AEC – прямоугольный. $\angle A = 90° - \angle TCF = 28°$.

8. **Ответ**. 31. **Решение**. $\angle FTE = 180° - \angle ETB = 149°$. $\angle A + \angle AET + \angle AFT + \angle FTE = 360°$, откуда $\angle A + 90° + 90° + 149° = 360°$, следовательно, $\angle A = 31°$.

9. **Ответ**. 140. **Решение**. Треугольник AEC – прямоугольный, $\angle A = 60°$, тогда $\angle ACE = 90° - 60° = 30°$. Аналогично в треугольнике ADC находим, что $\angle DAC = 10°$.

   Так как сумма углов треугольника равна 180°, то $\angle AFC = 180° - 10° - 30° = 140°$. Углы AFC и EFD равны как вертикальные, тогда $\angle EFD = 140°$.

10. **Ответ**. 109. **Решение**. Треугольник BOE – прямоугольный, $\angle OBE = 19°$, тогда $\angle BOE = 90° - 19° = 71°$. $\angle FOE$ – смежный с $\angle BOE$, тогда их сумма равна 180° и, значит, $\angle FOE = 109°$.

11. **Ответ**. 108. **Решение**. В треугольнике медианы точкой пересечения делятся в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Так как $BM = CN$, то $BO = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}CN = CO$, тогда треугольник BOC – равнобедренный. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle OCB = \angle OBC = 36°$.

    Так как сумма углов в треугольнике равна 180°, то $\angle BOC = 180° - \angle OBC - \angle OCB = 180° - 36° - 36° = 108°$.

12. **Ответ**. 16,5. **Решение**. $\angle AOB = \angle FOE = 147^\circ$ (как вертикальные).

В треугольнике медианы точкой пересечения делятся в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Так как $AE = BF$, то $AO = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3}BF = BO$, тогда треугольник ABO – равнобедренный. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle OAB = \angle ABO$.

Так как сумма углов в треугольнике равна 180°, то $180^\circ = \angle OAB + \angle ABO + \angle AOB = 2 \cdot \angle ABO + 147^\circ$, откуда $\angle ABO = 16,5^\circ$.

13. **Ответ**. 2. **Решение**. Так как сумма углов в треугольнике равна 180°, то $\angle PCB = 180^\circ - 110^\circ - 35^\circ = 35^\circ = \angle PBC$, значит, треугольник PBC – равнобедренный и $PB = PC$.

В треугольнике медианы точкой пересечения делятся в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Так как $PB = PC$, то $MP = 0,5 \cdot PC = 0,5 \cdot PB = PN$.

$\angle MPB$ и $\angle NPC$ – вертикальные, а значит, равные.

Таким образом, треугольники MPB и PNC – равны (по двум сторонам и углу между ними), тогда $NC = MB = 0,5 \cdot AB = 2$.

14. **Ответ**. 3. **Решение**. $AM = MN$,

$MN = NC$,

тогда $AC = AM + MN + NC = 3 \cdot MN$.

$AC : MN = 3$.

15. **Ответ**. 33. **Решение**. Так как каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон, то $PK = KQ = 33$.

Покажем это подробнее:

треугольники PKB и BKQ – прямоугольные, имеющие общую гипотенузу и $\angle PBK = \angle KBQ$, тогда треугольники PKB и BKQ равны по гипотенузе и острому углу, значит, $PK = KQ$.

16. **Ответ**. 127,5. **Решение**. $\angle AKB = \angle PKQ$, так как они вертикальные.

$\angle KAB = 0,5 \cdot \angle CAB$, $\angle ABK = 0,5 \cdot \angle ABC$, тогда при учёте того, что сумма углов в треугольнике равна 180° ($\angle CAB + \angle ABC + \angle C = 180^\circ$):

$\angle KAB + \angle ABK = 0,5 \cdot (\angle CAB + \angle ABC) = 0,5 \cdot (180^\circ - 75^\circ) = 52,5^\circ$, значит,

$\angle AKB = 180^\circ - (\angle KAB + \angle ABK) = 180^\circ - 52,5^\circ = 127,5^\circ$. Таким образом, $\angle PKQ = 127,5^\circ$.

17. **Ответ**. 6. **Решение**. По теореме о биссектрисе (биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам) имеем: $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{BC}{MC}$, тогда $\dfrac{AB}{3} = \dfrac{10}{5} = 2$, откуда $AB = 6$.

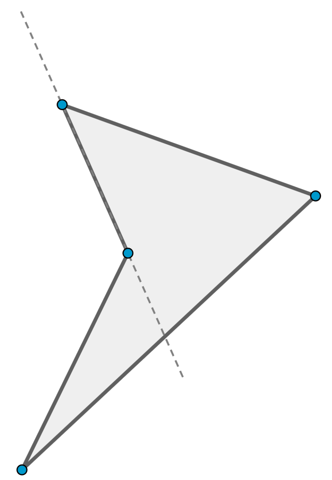
Определения

Многоугольник – это геометрическая фигура, состоящая из n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и отрезков, последовательно соединяющих эти точки.

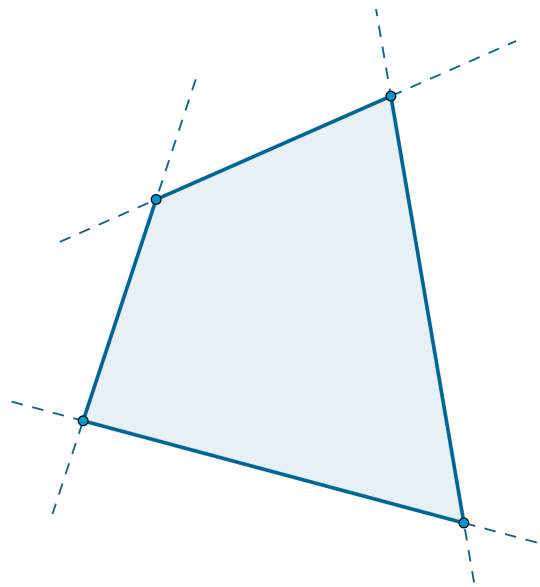
Диагональ многоугольника – отрезок, соединяющий любые две несоседние вершины.

Различают выпуклые и невыпуклые многоугольники.

Многоугольник называется выпуклым, если он находится в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей любую его сторону.



невыпуклый четырехугольник



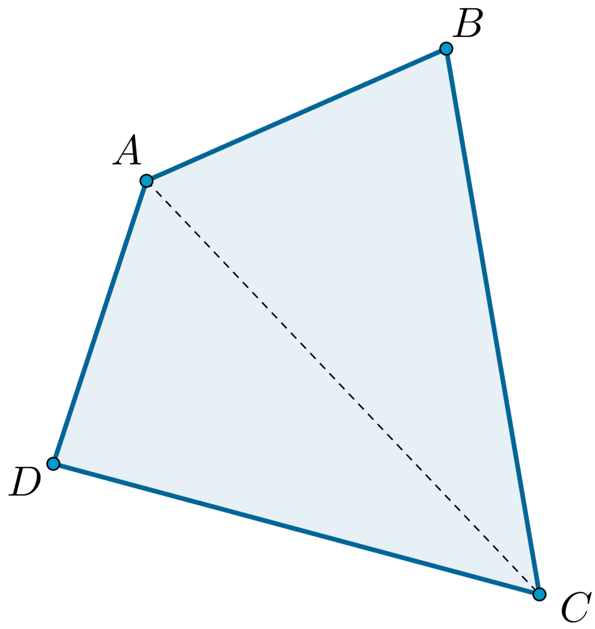
выпуклый четырехугольник

Перейдем к более подробному изучению выпуклых четырехугольников. В школьном курсе рассматриваются только выпуклые четырехугольники. Поэтому далее “выпуклый четырехугольник” будем сокращенно называть “четырехугольник”.

Теорема

Сумма внутренних углов любого четырехугольника равна 360°.

Доказательство



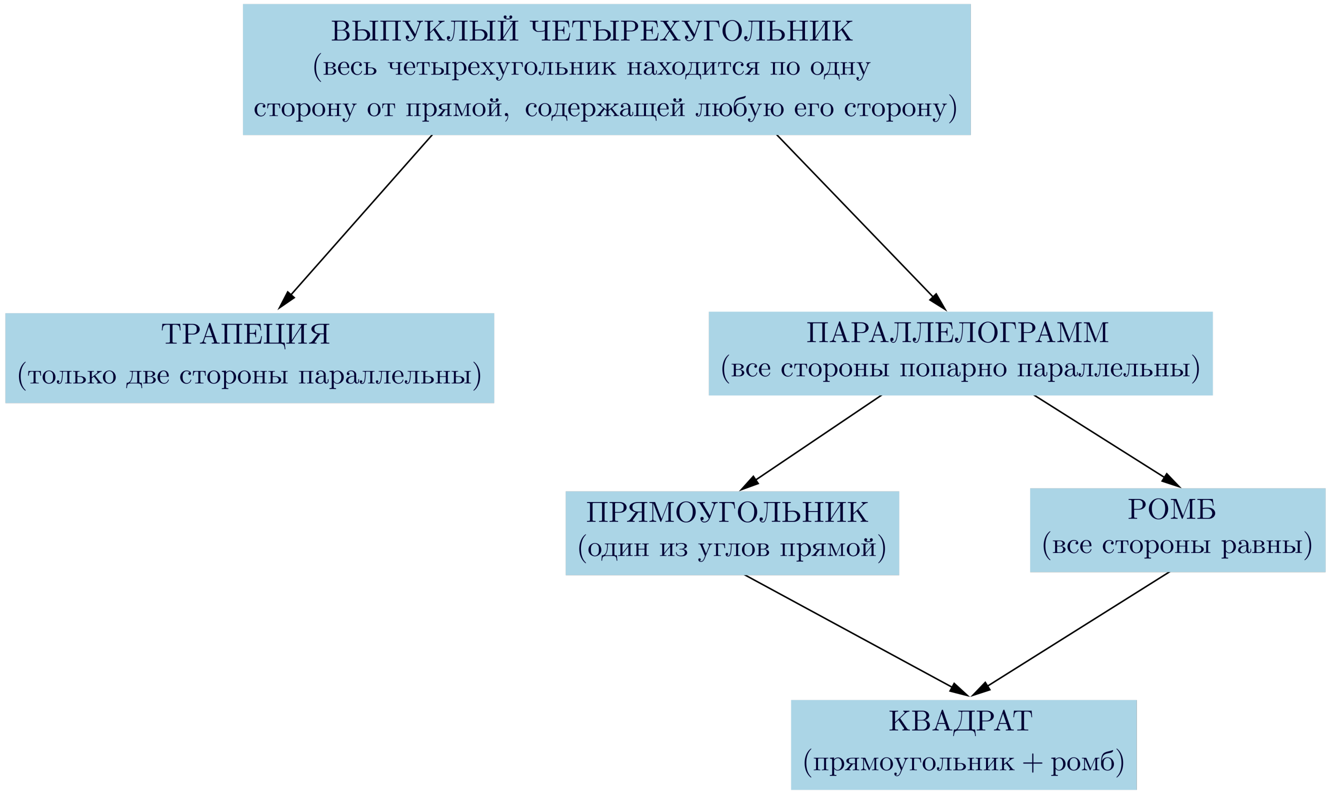
Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ и проведем его диагональ AC. Она разбила четырехугольник на два треугольника. Сумма углов любого треугольника равна 180°, следовательно:

$$360^\circ = 180^\circ + 180^\circ = (\angle DAC + \angle D + \angle ACD) + (\angle CAB + \angle B + \angle ACB) =$$
$$= \angle D + \angle B + (\angle DAC + \angle CAB) + (\angle ACD + \angle ACB) = \angle D + \angle B + \angle A +$$

Теорема

Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$, где n – число вершин многоугольника.

Перейдем к изучению основных видов четырехугольников.
Все известные четырехугольники, изучаемые в школьной программе, подчиняются следующей схеме:



Таким образом, любой четырехугольник из этой схемы обладает свойствами всех предыдущих четырехугольников, из которых он следует.
Эта схема вам поможет в процессе изучения данных четырехугольников.

Задачи для аудиторной работы

1. Найдите углы выпуклого четырехугольника, если они равны друг другу.

2. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, каждый угол которого равен $120°$?

3. Найдите сумму углов выпуклого десятиугольника.

4. Докажите, что если не все углы выпуклого четырехугольника равны друг другу, то хотя бы один из них тупой.

5. Найдите углы выпуклого четырехугольника, если они пропорциональны числам $1, 2, 4, 5$.

6. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, каждый угол которого равен $108°$?

7. Найдите сумму углов выпуклого пятиугольника.

1. 90°.

2. 6.

3. 1440.

4. Предположим, что это не так, то есть все углы прямые или острые. Так как существует хотя бы два различных угла, то существует хотя бы один острый угол. Следовательно, три угла четырехугольника $\leqslant 90^\circ$, а четвертый $< 90^\circ$, откуда сумма всех углов четырехугольника $< 360^\circ$, что противоречит тому, что сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°.

5. Указание. Принять углы четырехугольника за $x, 2x, 4x, 5x$. Ответ. $30^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 150^\circ$.

6. 5.

7. 540°.

Определение

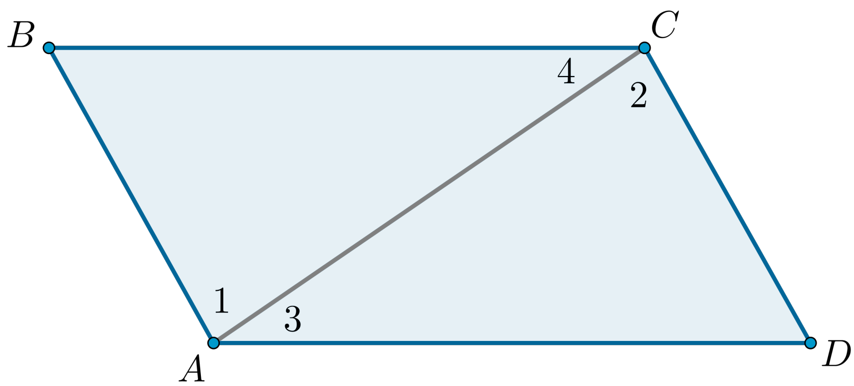
Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Теорема (первый признак параллелограмма)

Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Доказательство

Пусть в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $AB = CD$.



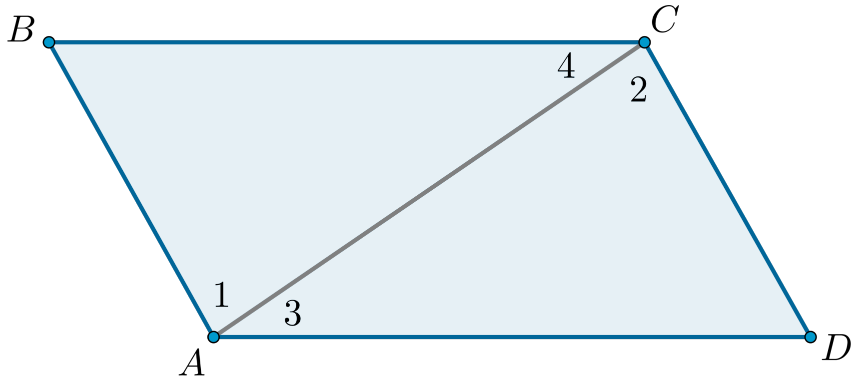
Проведём диагональ AC, разделяющую данный четырехугольник на два равных треугольника: ABC и CDA. Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними (AC – общая сторона, $AB = CD$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AC), поэтому $\angle 3 = \angle 4$. Но углы 3 и 4 накрест лежащие при пересечении прямых AD и BC секущей AC, следовательно, $AD \parallel BC$. Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны попарно параллельны, и, значит, четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

Теорема (второй признак параллелограмма)

Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Доказательство

Проведём диагональ AC данного четырехугольника $ABCD$, разделяющую его на треугольники ABC и CDA.



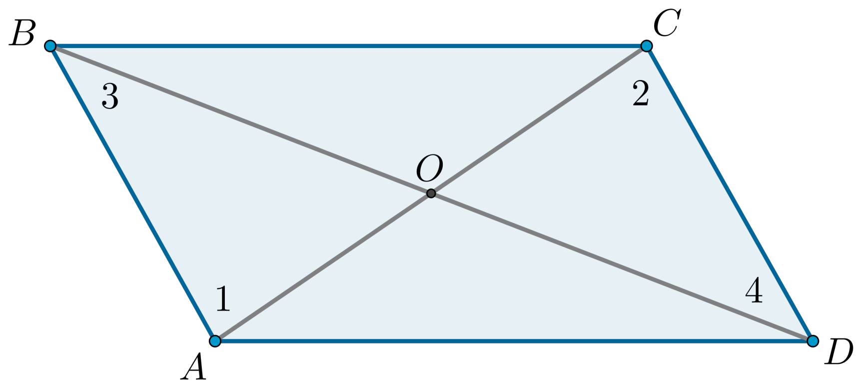
Эти треугольники равны по трем сторонам (AC – общая, $AB = CD$ и $BC = DA$ по условию), поэтому $\angle 1 = \angle 2$ – накрест лежащие при AB и CD и секущей AC. Отсюда следует, что $AB \parallel CD$. Так как $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, то по первому признаку параллелограмма четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм.

Теорема (третий признак параллелограмма)

Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Доказательство

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором диагонали AC и BD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам.



Треугольники AOB и COD равны по первому признаку равенства треугольников ($AO = OC$, $BO = OD$ по условию, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные углы), поэтому $AB = CD$ и $\angle 1 = \angle 2$. Из равенства углов 1 и 2 (накрест лежащие при AB и CD и секущей AC) следует, что $AB \parallel CD$.

Итак, в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны и параллельны, значит, по первому признаку параллелограмма четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

Свойства параллелограмма:

1. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

2. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Свойства биссектрисы параллелограмма:

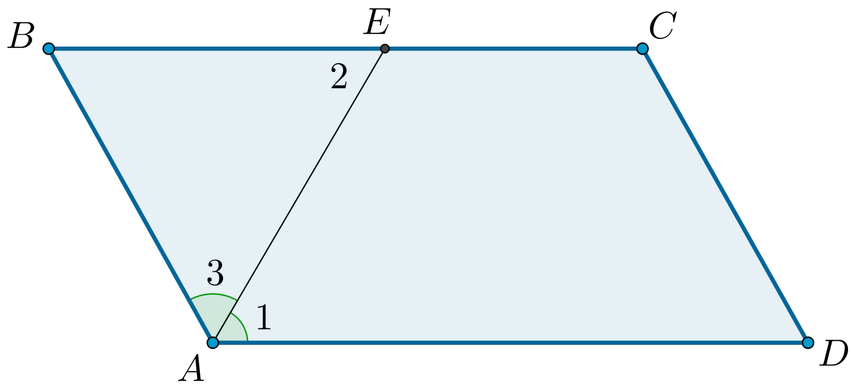
1. Биссектриса параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.

2. Биссектрисы односторонних углов параллелограмма пересекаются под прямым углом.

3. Отрезки биссектрис противоположных углов равны и параллельны.

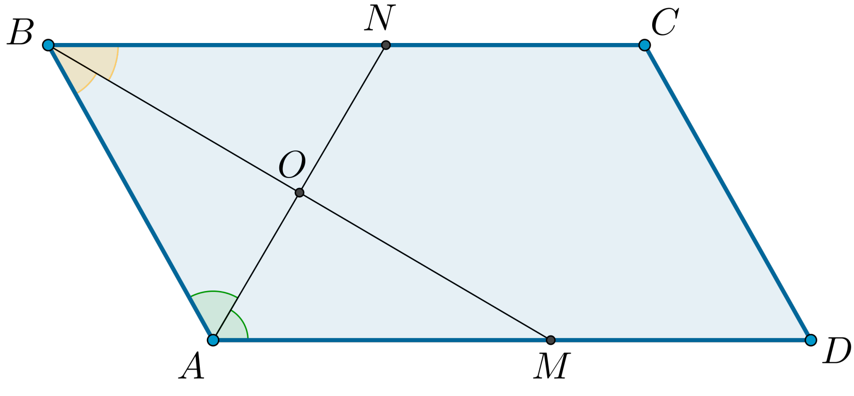
Доказательство

1) Пусть $ABCD$ – параллелограмм, AE – биссектриса угла BAD.



Углы 1 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AE. Углы 1 и 3 равны, так как AE – биссектриса. В итоге $\angle 3 = \angle 1 = \angle 2$, откуда следует, что треугольник ABE – равнобедренный.

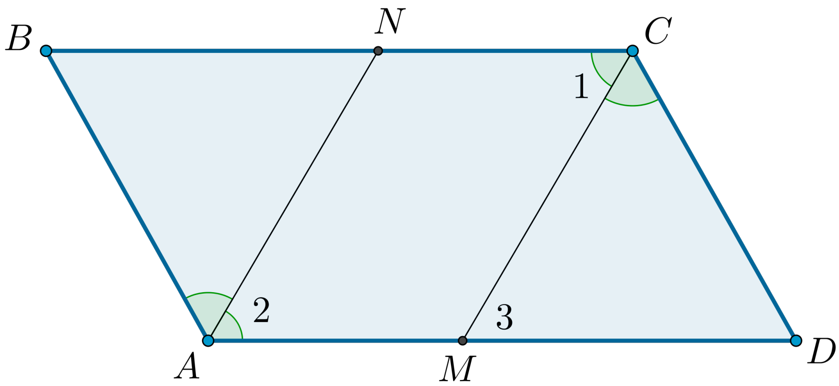
2) Пусть $ABCD$ – параллелограмм, AN и BM– биссектрисы углов BAD и ABC соответственно.



Так как сумма односторонних углов при параллельных прямых и секущей равна $180°$, тогда $\angle DAB + \angle ABC = 180°$.

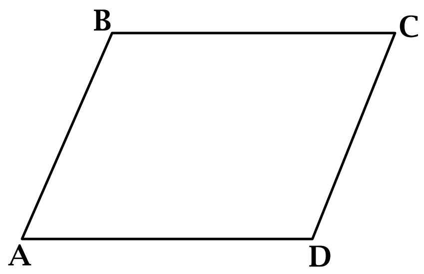
Так как AN и BM – биссектрисы, то $\angle BAN + \angle ABM = 0,5(\angle DAB + \angle ABC) = 0,5 \cdot 180° = 90°$, откуда $\angle AOB = 180° - (\angle BAN + \angle ABM) = 90°$.

3. Пусть AN и CM – биссектрисы углов параллелограмма $ABCD$.

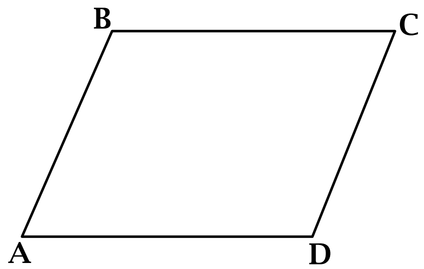


Так как в параллелограмме противоположные углы равны, то $\angle 2 = 0,5 \cdot \angle BAD = 0,5 \cdot \angle BCD = \angle 1$. Кроме того, углы 1 и 3 равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей CM, тогда $\angle 2 = \angle 3$, откуда следует, что $AN \parallel CM$. Кроме того, $AM \parallel CN$, тогда $ANCM$ – параллелограмм, следовательно, $AN = CM$.

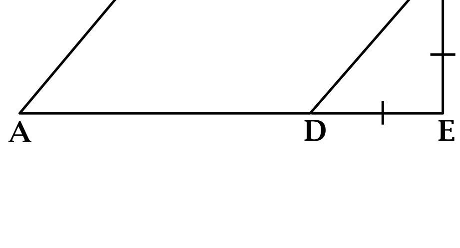
1. Периметр параллелограмма равен 100, его большая сторона равна 32. Найдите меньшую сторону параллелограмма.



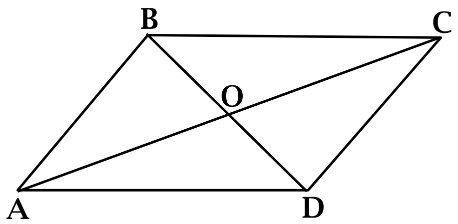
2. Периметр параллелограмма равен 15. При этом одна сторона этого параллелограмма на 5 больше другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.



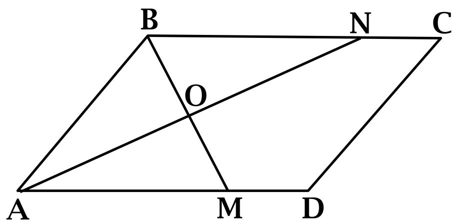
3. Из точки C параллелограмма $ABCD$ опустили перпендикуляр на продолжение стороны AD за точку D. Этот перпендикуляр пересёк прямую AD в точке E, причём $CE = DE$. Найдите $\angle B$ параллелограмма $ABCD$. Ответ дайте в градусах.



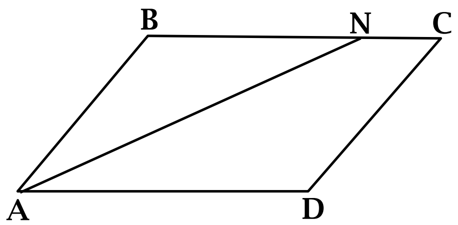
4. В параллелограмме $ABCD$ сумма длин диагоналей равна 10, а меньшая сторона параллелограмма $ABCD$ равна 2. Найдите наименьший из периметров треугольников, на которые диагонали делят параллелограмм $ABCD$.



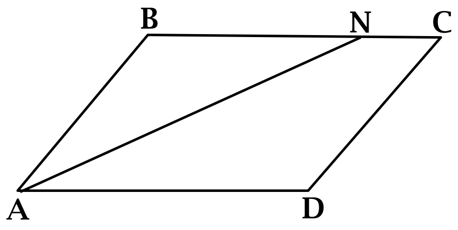
5. В параллелограмме $ABCD$ проведены биссектрисы AN и BM, $\angle ABM = 58°$. Найдите $\angle BAN$. Ответ дайте в градусах.



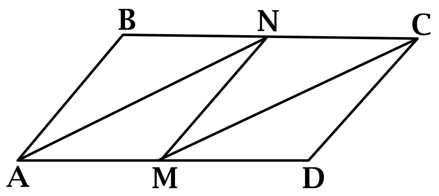
6. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса AN, точка N лежит на стороне BC, причём $NC = 3$, $AB = 5$. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$.



7. В параллелограмме $ABCD$ на стороне BC выбрана точка N так, что $AB = BN$, $\angle B = 150°$. Найдите $\angle NAD$. Ответ дайте в градусах.

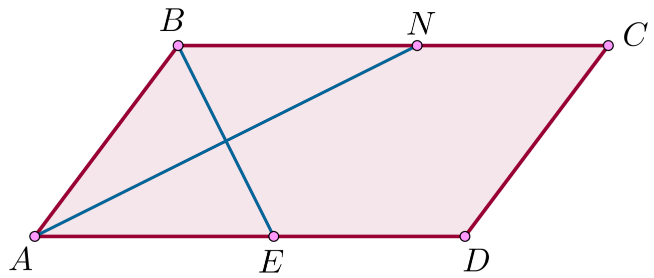


8. В параллелограмме $ABCD$: $BC = 2 \cdot AB$, AN и CM – биссектрисы, $AB = 4$. Найдите NM.

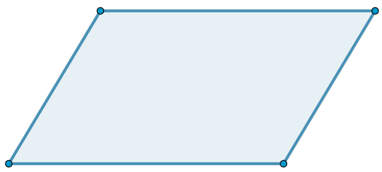


9. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются на стороне AD. Найдите BC, если $AB = 4$.

10. В параллелограмме $ABCD$ проведены биссектрисы AN и BE односторонних углов. Найдите BE, если $AN = 16$, $AB = 10$.

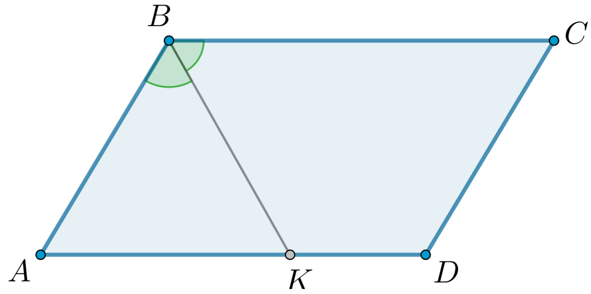


11. Один угол параллелограмма больше другого на $70°$. Найдите больший угол. Ответ дайте в градусах.

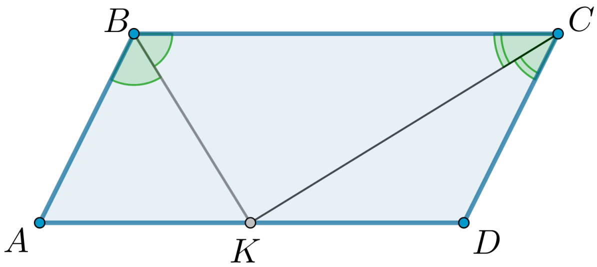


12. Найдите угол между биссектрисами углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне. Ответ дайте в градусах.

13. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении $4 : 3$, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88.



14. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 5. Найдите его большую сторону.



1. **Ответ**. 18. **Решение**. Так как у параллелограмма противоположные стороны равны, то его периметр равен удвоенной сумме его непараллельных сторон, тогда сумма большей и меньшей сторон равна $100 : 2 = 50$, значит, меньшая сторона параллелограмма равна $50 - 32 = 18$.

2. **Ответ**. 1,25. **Решение**. У параллелограмма противоположные стороны равны. Пусть $BC = AB + 5$, тогда периметр параллелограмма $ABCD$ равен $AB + BC + CD + AD = AB + AB + 5 + AB + AB + 5 = 4 \cdot AB + 10 = 15$, откуда находим $AB = 1,25$. Тогда меньшая сторона параллелограмма равна $1,25$.

3. **Ответ**. 135. **Решение**. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle EDC = \angle DCE$. Так как $\angle DEC = 90°$, а сумма углов треугольника равна $180°$, то $\angle EDC = 45°$, тогда $\angle ADC = 180° - 45° = 135°$. Так как в параллелограмме противоположные углы равны, то $\angle B = \angle ADC = 135°$.

4. **Ответ**. 7. **Решение**. В параллелограмме диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Пусть точка пересечения диагоналей – точка O, тогда $AO + BO = 0,5(AC + BD) = 5 = AO + OD = OD + OC = OC + OB$.

   Таким образом, периметр каждого из треугольников, на которые диагонали делят параллелограмм $ABCD$, равен полусумме диагоналей параллелограмма $ABCD$ плюс сторона параллелограмма, которая является стороной этого треугольника.

   Тогда наименьшим будет периметр того из этих треугольников, стороной которого является одна из меньших сторон параллелограмма и равен он $5 + 2 = 7$.

5. **Ответ**. 32. **Решение**. Сумма односторонних углов при параллельных прямых и секущей равна $180°$, тогда $\angle DAB + \angle ABC = 180°$.

Так как AN и BM – биссектрисы, то $\angle BAN+\angle ABM = 0,5(\angle DAB+\angle ABC) = 90°$.

$\angle ABM = 58°$, тогда $\angle BAN = 90° - 58° = 32°$.

6. **Ответ**. 26. **Решение**. Так как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей равны, то $\angle BNA = \angle NAD$.

   Так как AN – биссектриса, то $\angle NAD = \angle BAN$, откуда получаем $\angle BNA = \angle BAN$.

   Таким образом, треугольник ABN – равнобедренный, $BN = AB$, тогда $BC = BN + NC = 5 + 3 = 8$. В итоге, периметр параллелограмма $ABCD$ равен $8 + 8 + 5 + 5 = 26$.

7. **Ответ**. 15. **Решение**. Так как в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, то $\angle BAN = \angle BNA$.

   Так как сумма углов в треугольнике равна 180°, то $\angle BAN = \angle BNA = 15°$.

   Так как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей равны, то $\angle NAD = \angle BNA = 15°$.

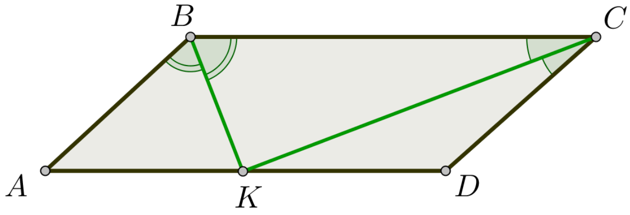
8. **Ответ**. 4. **Решение**. Внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей равны, тогда $\angle BNA = \angle NAD$, но $\angle NAD = \angle BAN$, тогда $\angle BNA = \angle BAN$ и треугольник BAN – равнобедренный, $AB = BN$. Обозначим $AB = x$.

   Аналогично треугольник MCD – равнобедренный, $x = CD = MD$.

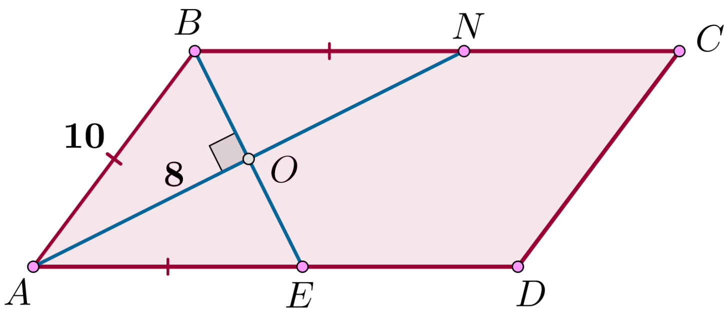
   $BC = 2x = AD$, тогда $NC = x = AM$, следовательно, $BN = x = AM$; $AM \parallel BN$, тогда $ABNM$ – параллелограмм, откуда заключаем, что $MN = AB = 4$.

9. **Ответ**. 8. **Решение**.
   По свойству биссектрисы параллелограмма $\triangle ABK$ и $\triangle CDK$ – равнобедренные ($AB = AK$, $CD = DK$). Следовательно,

$$BC = AD = AK + DK = AB + CD = 2AB = 8.$$



10. **Ответ**. 12. **Решение**.



По свойству биссектрисы параллелограмма $\triangle ABE$ и $\triangle ABN$ – равнобедренные, то есть $AE = AB = BN$. Следовательно, AO – биссектриса, проведенная к основанию, значит, высота, то есть $\angle AOB = 90°$, а также и медиана, то есть $BO = OE$. Аналогично $AO = ON = \frac{1}{2}AN = 8$. Тогда по теореме Пифагора из $\triangle AOB$:

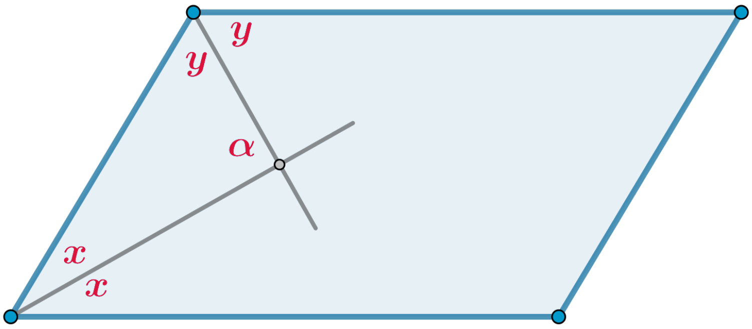
$$BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = 6 \quad \Rightarrow \quad BE = 2 \cdot 6 = 12.$$

11. **Ответ**. 125. **Решение**. В параллелограмме противоположные углы равны, а прилежащие к одной стороне в сумме дают $180°$. Следовательно, пусть x – некоторый угол параллелограмма, тогда второй равен $x + 70°$. Так как они не могут быть противоположными, то они прилежащие к одной стороне, следовательно,

$$x + x + 70° = 180° \quad \Rightarrow \quad x = 55°$$

Тогда больший угол параллелограмма равен $x + 70° = 125°$.

12. **Ответ**. 90. **Решение**. Проведем биссектрисы двух соседних углов. Пусть они разбили первый угол на два угла, равных x, второй угол — на два угла, равных y. Нужно найти α.
По свойству параллелограмма сумма его углов, прилежащих к одной стороне, равна $180°$. Следовательно, $2x + 2y = 180°$, или $2(x + y) = 180°$, откуда $x + y = 90°$.



Так как сумма углов в треугольнике равна $180°$, то $x+y+\alpha = 180°$, откуда $\alpha = 180° - (x+y) = 180° - 90° = 90°$.

13. **Ответ**. 28. **Решение**. Из условия задачи следует, что $AK : KD = 4 : 3$. Обозначим $AK = 4x$, $KD = 3x$. Следовательно, $AD = 7x$. Так как в параллелограмме противоположные стороны параллельны, то $\angle AKB = \angle KBC$ как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей BK. Следовательно, $\angle AKB = \angle ABK$, то есть $\triangle ABK$ равнобедренный: $AK = AB$. Отсюда $AB = 4x$.
Следовательно, периметр $88 = 2(4x + 7x)$ (так как противоположные стороны параллелограмма равны), следовательно, $x = 4$. Значит, большая сторона параллелограмма равна $7x = 28$.

14. **Ответ**. 10. **Решение**. $AB = 5$. Так как в параллелограмме противоположные стороны параллельны, то $\angle AKB = \angle KBC$ как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей BK. Следовательно, $\angle AKB = \angle ABK$, то есть $\triangle ABK$ равнобедренный: $AK = AB$. Аналогично $DC = DK$.
Так как в параллелограмме противоположные стороны равны, то $AK = AB = 5 = CD = DK$. Следовательно, $AD = 5 + 5 = 10$ – большая сторона.

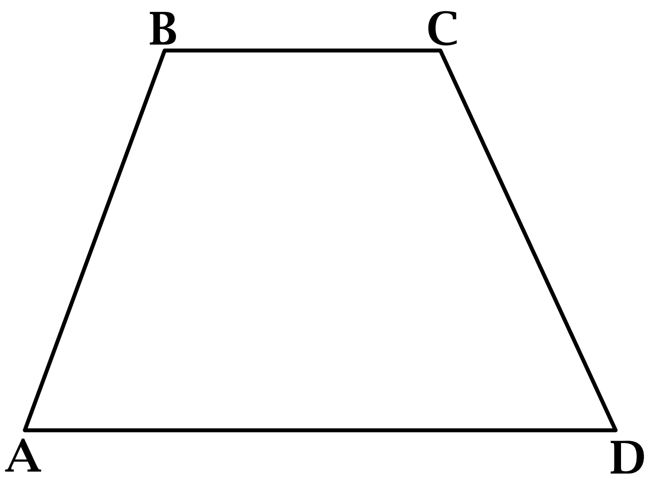
Урок 10. Трапеция. Теорема Фалеса. Средняя линия

Определения

Трапеция – это выпуклый четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

Параллельные стороны трапеции называются её основаниями, а две другие стороны – боковыми сторонами.

Высота трапеции – это перпендикуляр, опущенный из любой точки одного основания к другому основанию.



Теорема

Сумма углов при боковой стороне равна $180°$.

Доказательство

Т.к. $AD \parallel BC$, то углы $\angle BAD$ и $\angle ABC$ – односторонние при этих прямых и секущей AB, следовательно, $\angle BAD + \angle ABC = 180°$.

Определения

Трапеция называется прямоугольной, если один из ее углов – прямой.

Трапеция называется равнобедренной, если ее боковые стороны равны.

Теоремы: свойства равнобедренной трапеции

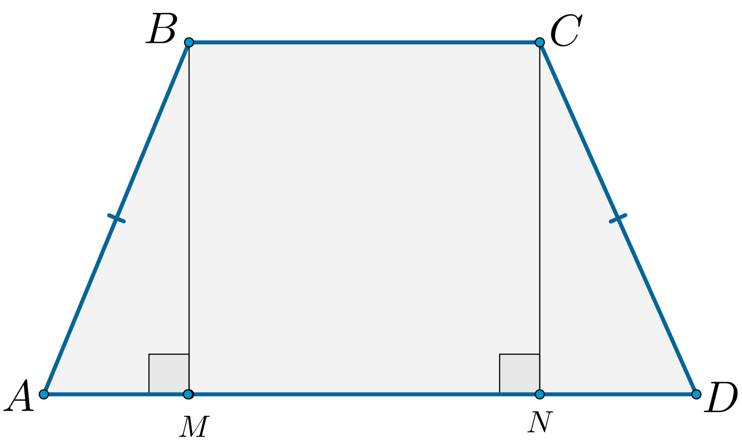
1) У равнобедренной трапеции углы при основании равны.

2) Диагонали равнобедренной трапеции равны.

3) Два треугольника, образованные диагоналями и основанием, являются равнобедренными.

Доказательство

1) Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$.

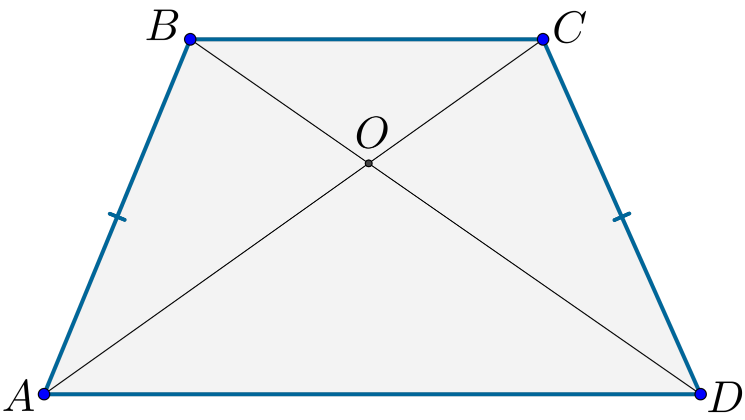


Из вершин B и C опустим на сторону AD перпендикуляры BM и CN соответственно. Так как $BM \perp AD$ и $CN \perp AD$, то $BM \parallel CN$; $AD \parallel BC$, тогда $MBCN$ – параллелограмм, следовательно, $BM = CN$.

Рассмотрим прямоугольные треугольники ABM и CDN. Так как у них равны гипотенузы и катет BM равен катету CN, то эти треугольники равны, следовательно, $\angle DAB = \angle CDA$.

2) Т.к. $AB = CD, \angle A = \angle D, AD$ – общая, то по первому признаку $\triangle ABD = \triangle ACD$. Следовательно, $AC = BD$.

3) Т.к. $\triangle ABD = \triangle ACD$, то $\angle BDA = \angle CAD$. Следовательно, треугольник $\triangle AOD$ – равнобедренный. Аналогично доказывается,



что и $\triangle BOC$ – равнобедренный.

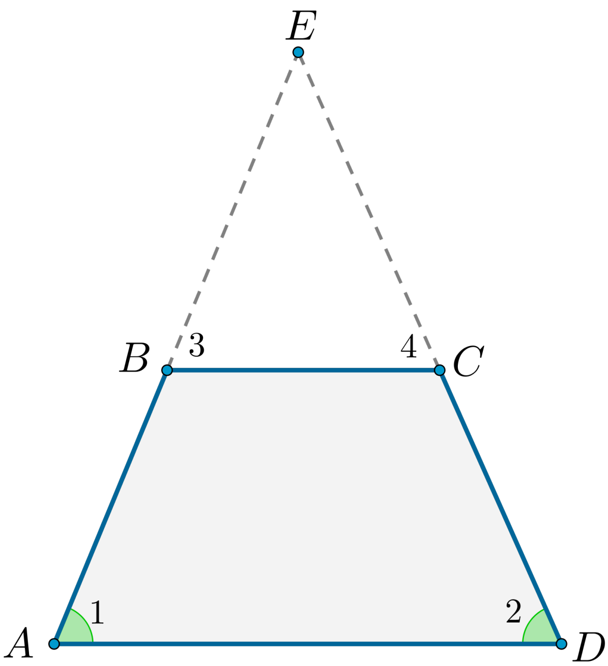
Теоремы: признаки равнобедренной трапеции

1) Если у трапеции углы при основании равны, то она равнобедренная.

2) Если у трапеции диагонали равны, то она равнобедренная.

Доказательство

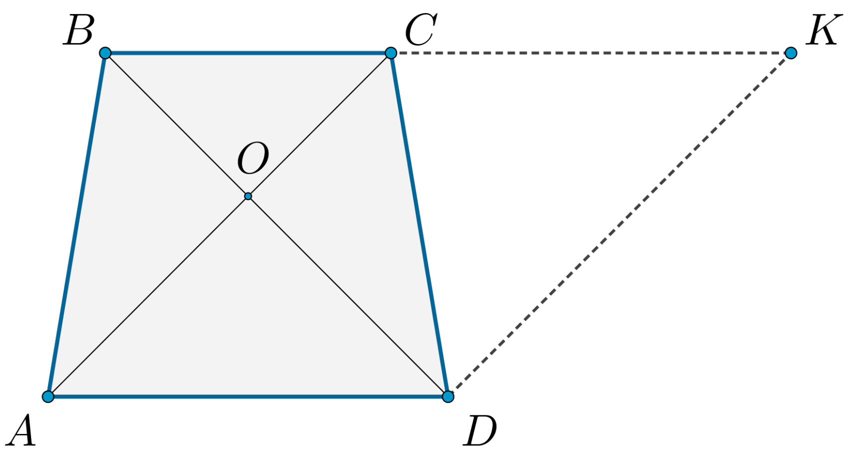
Рассмотрим трапецию $ABCD$, такую что $\angle A = \angle D$.



Достроим трапецию до треугольника AED как показано на рисунке. Так как $\angle 1 = \angle 2$, то треугольник AED равнобедренный и $AE = ED$. Углы 1 и 3 равны как соответственные при параллельных прямых AD и BC и секущей AB. Аналогично равны углы 2 и 4, но $\angle 1 = \angle 2$, тогда $\angle 3 = \angle 1 = \angle 2 = \angle 4$, следовательно, треугольник BEC тоже равнобедренный и $BE = EC$.

В итоге $AB = AE - BE = DE - CE = CD$, то есть $AB = CD$, что и требовалось доказать.

2) Пусть $AC = BD$. Проведем $DK \parallel AC$. Тогда $ACKD$ – параллелограмм, так как его противоположные стороны попарно параллельны. Следовательно, $DK = AC$ и $\angle CAD = \angle CKD$. Так как $AC = BD$, то $BD = DK$, следовательно, $\triangle BDK$ равнобедренный и $\angle CKD = \angle CBD$. Как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ $\angle CBD = \angle BDA$ и $\angle CAD = \angle BCA$. Следовательно, $\triangle ABD = \triangle ACD$, так как AD – общая, $AC = BD$ и $\angle BDA = \angle CAD$. Отсюда $AB = CD$, следовательно, трапеция равнобедренная.

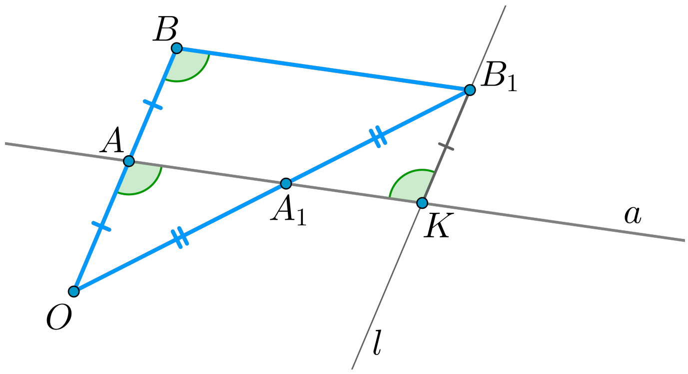


Теорема Фалеса (частный случай)

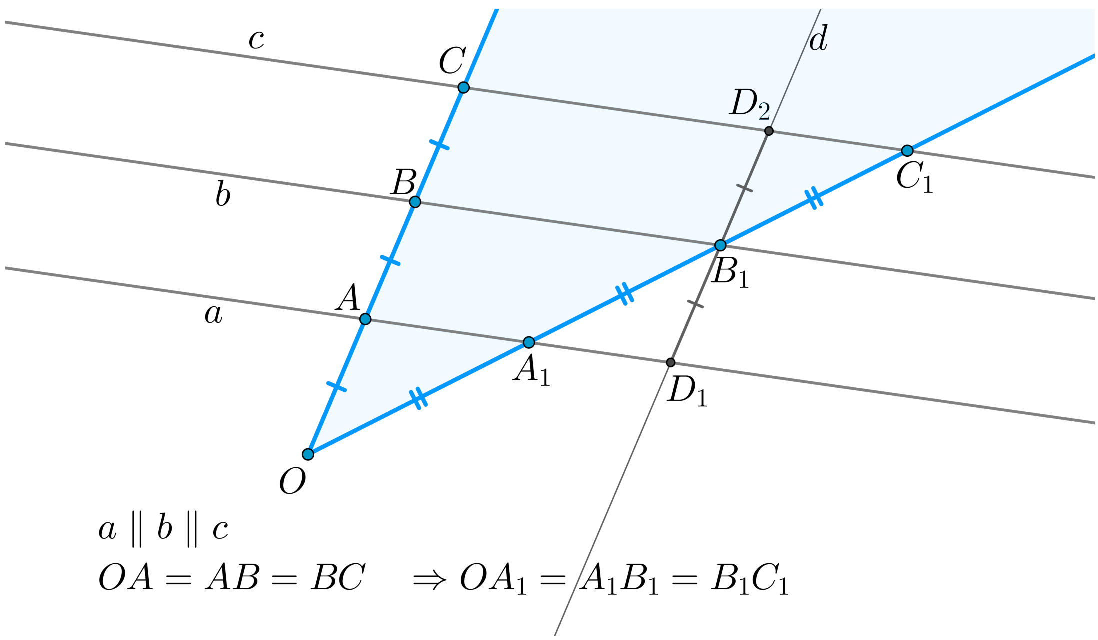
Если на одной из сторон угла отметить равные между собой отрезки и через их концы провести параллельные прямые, то эти прямые отсекут на второй стороне также равные между собой отрезки.

Доказательство

Докажем сначала **лемму:** Если в $\triangle OBB_1$ через середину A стороны OB проведена прямая $a \parallel BB_1$, то она пересечет сторону OB_1 также в середине.



Через точку B_1 проведем $l \parallel OB$. Пусть $l \cap a = K$. Тогда ABB_1K — параллелограмм, следовательно, $B_1K = AB = OA$ и $\angle A_1KB_1 = \angle ABB_1 = \angle OAA_1$; $\angle AA_1O = \angle KA_1B_1$ как вертикальные. Значит, по второму признаку $\triangle OAA_1 = \triangle B_1KA_1 \Rightarrow OA_1 = A_1B_1$. Лемма доказана.



Перейдем к доказательству теоремы. Пусть $OA = AB = BC$, $a \parallel b \parallel c$ и нужно доказать, что $OA_1 = A_1B_1 = B_1C_1$.

Таким образом, по данной лемме $OA_1 = A_1B_1$. Докажем, что $A_1B_1 = B_1C_1$. Проведем через точку B_1 прямую $d \parallel OC$, причем пусть $d \cap a = D_1, d \cap c = D_2$. Тогда ABB_1D_1, BCD_2B_1 — параллелограммы, следовательно, $D_1B_1 = AB = BC = B_1D_2$. Таким образом, $\angle A_1B_1D_1 = \angle C_1B_1D_2$ как вертикальные, $\angle A_1D_1B_1 = \angle C_1D_2B_1$ как накрест лежащие, и, значит, по второму признаку $\triangle A_1B_1D_1 = \triangle C_1B_1D_2 \Rightarrow A_1B_1 = B_1C_1$.

Определение

Средняя линия треугольника – это отрезок, соединяющий середины любых двух сторон треугольника.

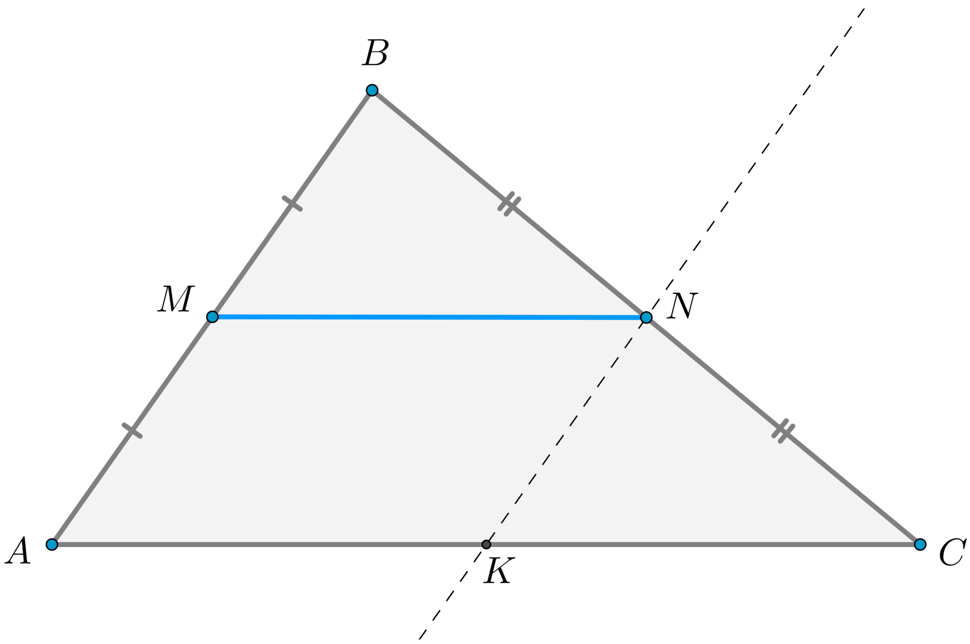
Теорема

Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Доказательство

1) Параллельность средней линии основанию следует из доказанной выше **леммы**. Предположим, что это не так: средняя линия MN не параллельна стороне AC треугольника ABC. Проведем $MN' \parallel AC$. Тогда по лемме N' – середина BC. Но так как у отрезка не может быть двух разных середин, то точка N' совпадает с точкой N, следовательно, прямая MN' совпадает с MN, то есть $MN \parallel AC$.

2) Докажем, что $MN = \dfrac{1}{2}AC$.



Через точку N проведем прямую параллельно AB. Пусть эта прямая пересекла сторону AC в точке K. Тогда $AMNK$ — параллелограмм ($AM \parallel NK, MN \parallel AK$). Значит, $MN = AK$.

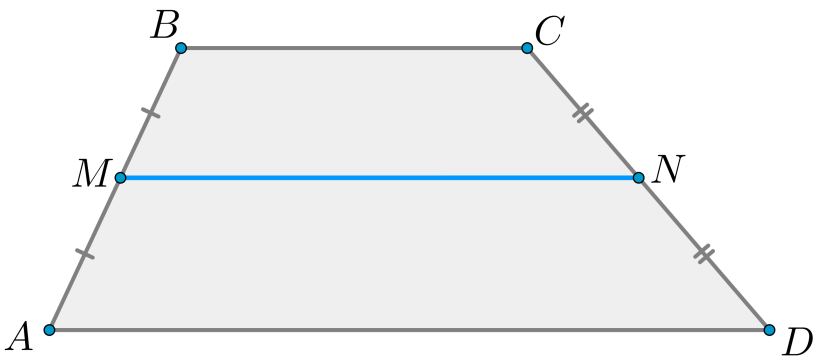
Т.к. $NK \parallel AB$ и N – середина BC, то по теореме Фалеса K – середина AC. Следовательно, $MN = AK = KC = \dfrac{1}{2}AC$.

Определение

Средняя линия трапеции – отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

Теорема

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

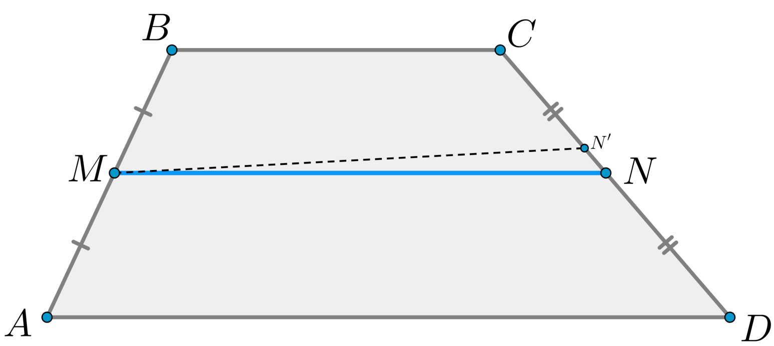


$$MN \parallel AD \parallel BC$$

$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

Доказательство

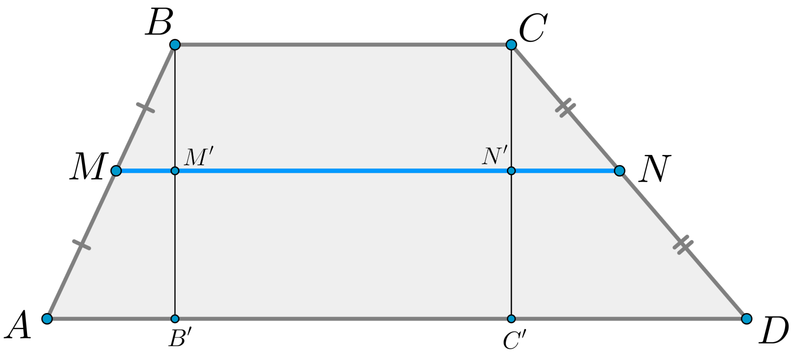
1) Докажем параллельность.



Проведем через точку M прямую $MN' \parallel AD$ ($N' \in CD$). Тогда по теореме Фалеса (т.к. $MN' \parallel AD \parallel BC, AM = MB$) точка N' — середина отрезка CD. Значит, точки N и N' совпадут.

2) Докажем формулу.

Проведем $BB' \perp AD, CC' \perp AD$. Пусть $BB' \cap MN = M', CC' \cap MN = N'$.



Тогда по теореме Фалеса M' и N' — середины отрезков BB' и CC' соответственно. Значит, MM' – средняя линия $\triangle ABB'$, NN' — средняя линия $\triangle DCC'$. Поэтому:

$$MM' = \frac{1}{2}AB', \quad NN' = \frac{1}{2}DC'$$

Т.к. $MN \parallel AD \parallel BC$ и $BB', CC' \perp AD$, то $B'M'N'C'$ и $BM'N'C$ – прямоугольники. По теореме Фалеса из $MN \parallel AD$ и $AM = MB$ следует, что $B'M' = M'B$. Значит, $B'M'N'C'$ и $BM'N'C$ – равные прямоугольники, следовательно, $M'N' = B'C' = BC$.

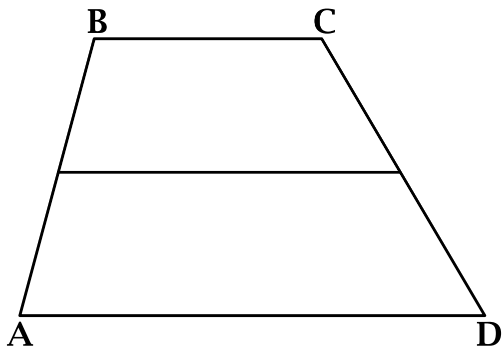
Таким образом:

$$MN = MM' + M'N' + N'N = \frac{1}{2}AB' + B'C' + \frac{1}{2}C'D =$$
$$= \frac{1}{2}\left(AB' + B'C' + BC + C'D\right) = \frac{1}{2}\left(AD + BC\right)$$

Задачи для аудиторной работы

1. В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = 4$ и $AD > BC$ угол A – прямой. Известно, что $CD = 6$, $\angle D = 60°$. Найдите среднюю линию трапеции $ABCD$.

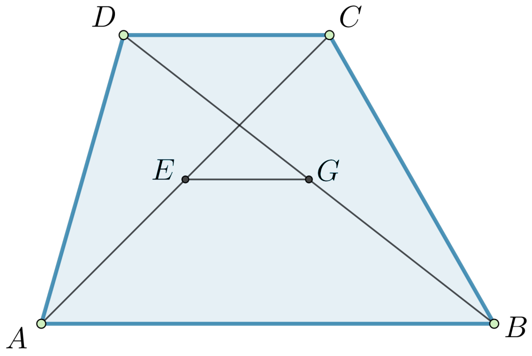
2. В трапеции $ABCD$ средняя линия составляет $\frac{4}{5}$ одного из оснований. Найдите отношение длины другого основания к длине средней линии.



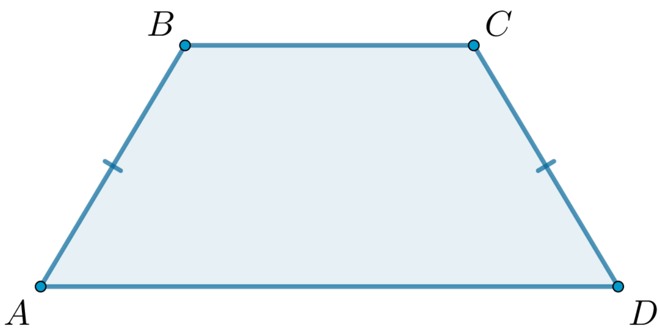
3. $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC. При этом $AB = CD = 6$, $BC = 4$, один из углов трапеции $ABCD$ равен $60°$. Найдите AD.

4. В трапеции $ABCD$: $AB = CD$, $\angle C - \angle A = 80°$. Найдите $\angle D + \angle B - \angle C$. Ответ дайте в градусах.

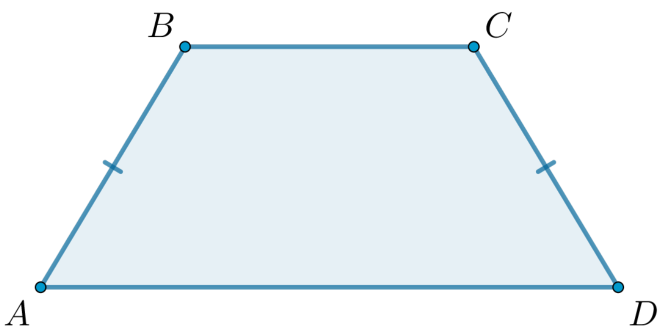
5. Основания трапеции равны 3 и 2. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.



6. В равнобедренной трапеции большее основание равно 25, боковая сторона равна 10, угол между ними 60°. Найдите меньшее основание.

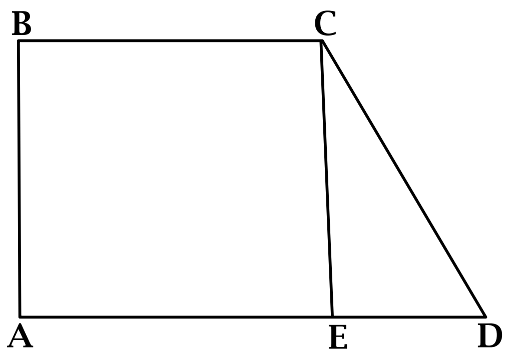


7. В равнобедренной трапеции основания равны 12 и 27, острый угол равен 60°. Найдите ее периметр.



8. Основания равнобедренной трапеции равны 15 и 9, один из углов равен 45°. Найдите высоту трапеции.

1. **Ответ**. 5,5. **Решение**.

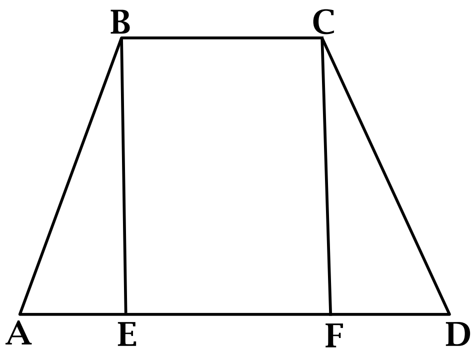


Из точки C опустим высоту CE. В прямоугольном треугольнике CDE: $\angle ECD = 30^\circ$. В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30° равен половине гипотенузы, тогда $DE = 0,5 \cdot CD = 3$. При этом $ABCE$ – прямоугольник, $AE = BC = 4$, тогда $AD = AE + ED = 4 + 3 = 7$.

В трапеции средняя линия равна полусумме оснований. $0,5(BC + AD) = 0,5(4+7) = 5,5$, значит, длина средней линии равна $5,5$.

2. **Ответ**. 0,75. **Решение**. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований. Полусумма оснований трапеции $ABCD$ составляет $0,8$ одного из оснований, тогда сумма оснований трапеции $ABCD$ составляет $2 \cdot 0,8 = 1,6$ этого основания, обозначим его за AD. Тогда $BC + AD = 1,6AD$, откуда $BC = 0,6AD$. Средняя линия равна $0,8AD$, тогда отношение длины основания BC к длине средней линии равно $0,6 : 0,8 = 0,75$.

3. **Ответ**. 10. **Решение**. Пусть $\angle A = 60^\circ$, BE – высота в треугольнике ABD. $\angle ABE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы, тогда $AE = 0,5 \cdot 6 = 3$. У равнобедренной трапеции углы при одном основании равны, тогда $\angle D = 60^\circ$. Пусть CF – высота в треугольнике ACD, тогда аналогично тому, как находили AE, находим, что $FD = 3$. $EF = BC$,



так как $BCFE$ – прямоугольник. Тогда $AD = AE + EF + FD = 3 + 4 + 3 = 10$.

4. **Ответ**. 50. **Решение**. У равнобедренной трапеции углы при одном основании равны, тогда $\angle B = \angle C$ и, следовательно, $\angle D + \angle B - \angle C = \angle D = \angle A$.

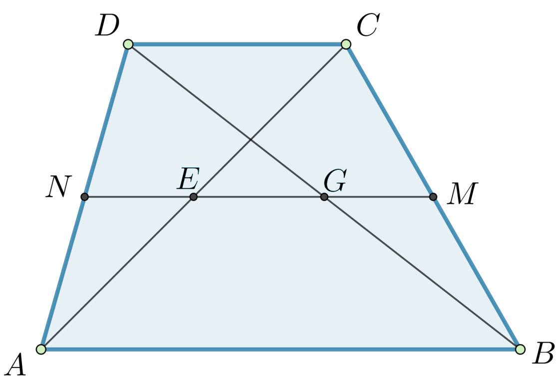
   У равнобедренной трапеции сумма противоположных углов равна $180°$ (так как $\angle C = \angle B$, а $\angle A + \angle B = 180°$, как сумма односторонних при параллельных прямых и секущей).

   $\angle A + \angle C = 180°$,

   $\angle C - \angle A = 80°$

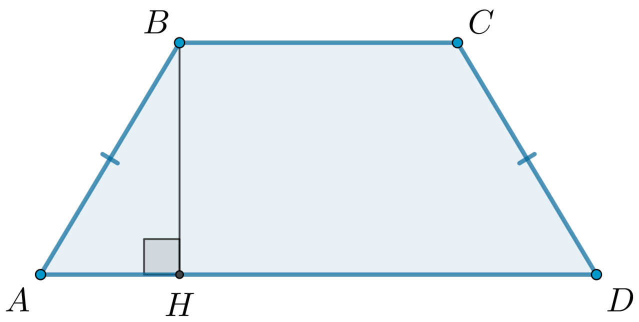
   тогда, вычитая из верхнего равенства нижнее, получаем $2 \cdot \angle A = 100°$. В итоге имеем: $\angle D + \angle B - \angle C = \angle A = 50°$.

5. **Ответ**. 0,5. **Решение**. Пусть M и N – середины боковых сторон трапеции. Отрезок MN пересекает диагонали в серединах: E и G. *Действительно, так как MN – средняя линия, то $MN \parallel AB \parallel$*



CD. Следовательно, если рассмотреть $\triangle ADC$, то $NE \parallel CD$. Так как к тому же N – середина AD, то по теореме Фалеса E – середина AC. Аналогично доказывается, что G – середина DB. Так как средняя линия равна полусумме оснований, то $MN = 0,5(3+2) = 2,5$. Так как NE и GM – средние линии в треугольниках ADC и BDC соответственно, параллельные CD, то $NE = GM = 0,5CD = 0,5 \cdot 2 = 1$. Следовательно, $EG = MN - NE - GM = 2,5 - 1 - 1 = 0,5$.

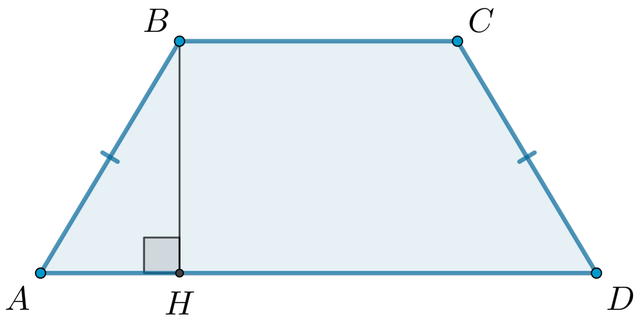
6. **Ответ**. 15. **Решение**. $\angle A = 60°$. Проведем высоту BH. По свой-



ству равнобедренной трапеции $AH = (AD - BC) : 2$. В прямоугольном $\triangle ABH$ $\angle ABH = 90° - 60° = 30°$. Катет, лежащий против угла $30°$, равен половине гипотенузы: $AH = AB : 2 = 5$. Следовательно,

$$5 = (25 - BC) : 2 \quad \Rightarrow \quad BC = 15$$

7. **Ответ**. 69. **Решение**. $\angle A = 60°$. Проведем высоту BH. По свой-

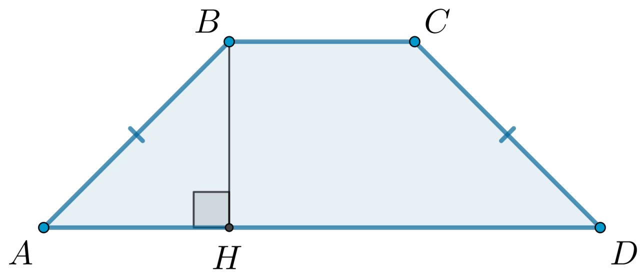


ству равнобедренной трапеции $AH = (AD - BC) : 2 = (27 - 12) : 2 = 7,5$. В прямоугольном $\triangle ABH$ $\angle ABH = 90° - 60° = 30°$. Катет, лежащий против угла $30°$, равен половине гипотенузы:

$AH = AB : 2$. Значит, $AB = 2AH = 15$. Следовательно, периметр равен

$$P = 15 + 15 + 12 + 27 = 69$$

8. **Ответ**. 3. **Решение**. $\angle A = 45^\circ$. Проведем высоту BH. По свой-



ству равнобедренной трапеции $AH = (AD - BC) : 2 = (15 - 9) : 2 = 3$. В прямоугольном $\triangle ABH$ $\angle ABH = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Следовательно, $\triangle ABH$ равнобедренный и $BH = AH = 3$.

Определение

Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Таким образом, ромб обладает всеми свойствами параллелограмма:

∼ противоположные углы ромба попарно равны;

∼ односторонние углы ромба в сумме дают 180°;

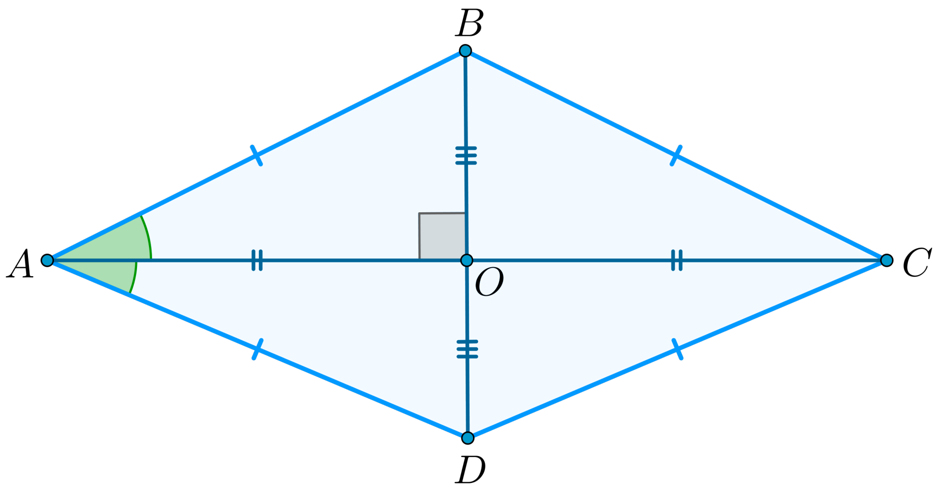
∼ диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Теорема: свойство ромба

Диагонали ромба перпендикулярны и делят его углы пополам.

Доказательство

Рассмотрим ромб $ABCD$.



По определению ромба $AB = AD$, поэтому треугольник BAD равнобедренный. Так как ромб – параллелограмм, то его диагонали точкой O пересечения делятся пополам. Следовательно, AO – медиана равнобедренного треугольника BAD, а значит, высота и биссектриса этого треугольника. Поэтому $AC \perp BD$ и $\angle BAC = \angle DAC$.

Теорема: признаки ромба

1. Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то это – ромб.

2. Если в параллелограмме диагонали делят его углы пополам, то это – ромб.

3. Если в выпуклом четырехугольнике все стороны равны, то он – ромб.

Доказательство

1) Рассмотрим параллелограмм $ABCD$. Пусть $AC \perp BD$.

Т.к. в параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам, то в треугольнике ABD отрезок AO – медиана. Т.к. к тому же AO – высота (следует из условия), то $\triangle ABD$ – равнобедренный, т.е. $AB = AD$. Т.к. у параллелограмма противоположные стороны равны, то отсюда следует, что все его стороны будут равны.

2) Пусть AC – биссектриса угла $\angle A$.

Т.к. в параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам, то в треугольнике ABD отрезок AO – медиана. Т.к. к тому же AO – биссектриса (следует из условия), то $\triangle ABD$ – равнобедренный, т.е. $AB = AD$. Т.к. у параллелограмма противоположные стороны равны, то отсюда следует, что все его стороны будут равны.

3) Пусть $ABCD$ – произвольный четырехугольник и $AB = BC = CD = AD$.

Т.к. противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то он – параллелограмм. Т.к. у него все стороны равны, то по определению это ромб.

Определение

Прямоугольник – это параллелограмм, у которого один угол прямой.

Таким образом, прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма:

∼ противоположные стороны попарно равны;

∼ диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Теоремы: свойства прямоугольника

1) Все углы прямоугольника прямые.

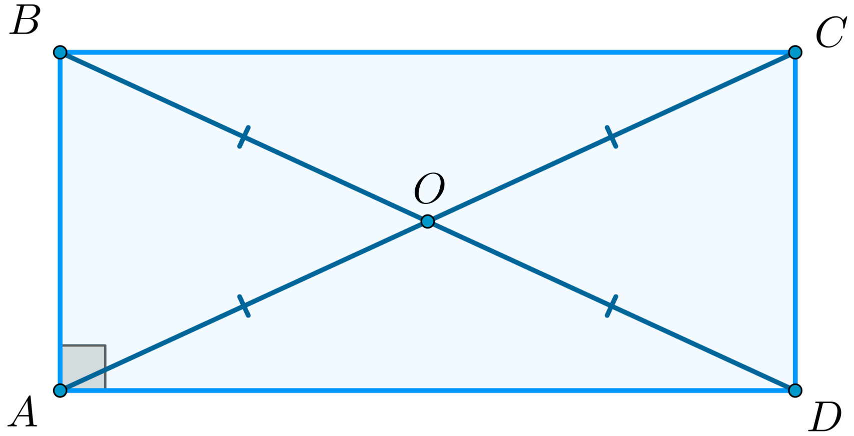
2) Диагонали прямоугольника равны.

Доказательство

1) Пусть $\angle A = 90^\circ$. Т.к. в параллелограмме сумма соседних углов равна 180°, то $\angle B = 180^\circ - \angle A = 90^\circ$.

Т.к. в параллелограмме противоположные углы равны, то $\angle C = \angle A = 90^\circ, \angle D = \angle B = 90^\circ$, чтд.

2) Рассмотрим прямоугольник $ABCD$.



Прямоугольные треугольники ACD и DBA равны по двум катетам ($CD = BA$, AD – общий катет). Отсюда следует, что гипотенузы этих треугольников равны, т.е. $AC = BD$.

Следствие

Таким образом, половинки диагоналей в прямоугольнике равны, т.е. $OA = OB = OC = OD$.

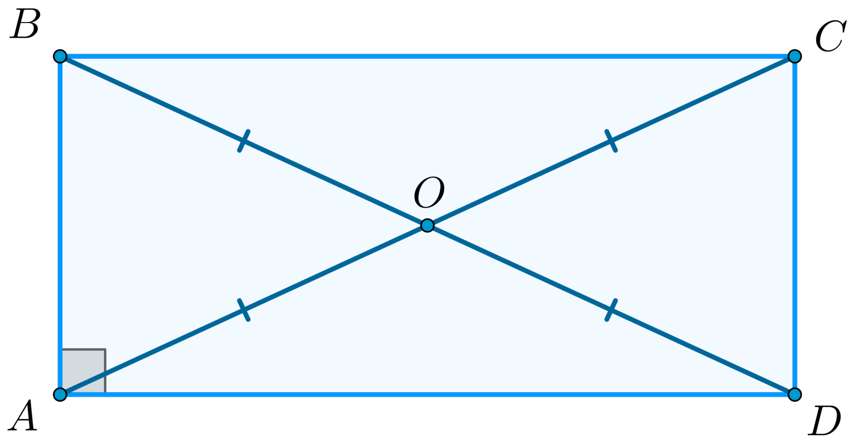
Теоремы: признаки прямоугольника

1) Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм – прямоугольник.

2) Если в выпуклом четырехугольнике все углы прямые, то он – прямоугольник.

Доказательство

1) Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагонали равны.

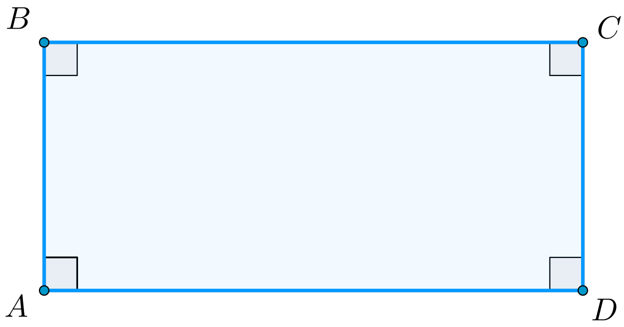


Треугольники ABD и DCA равны по трем сторонам ($AB = CD$, $BD = AC$, AD – общая сторона). Отсюда следует, что $\angle A = \angle D$. Так как в параллелограмме противоположные углы равны, то $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$. Таким образом, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$. Параллелограмм – выпуклый четырехугольник, поэтому $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Следовательно, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.

2) Рассмотрим четырехугольник $ABCD$:

Т.к. $\angle A + \angle B = 180°$ – односторонние углы при прямых AD и BC и секущей AB, следовательно, $AD \parallel BC$.

Аналогично доказывается, что $AB \parallel CD$. Значит, $ABCD$ – параллелограмм. Т.к. у него к тому же все углы прямые, то по определению



это прямоугольник.

Определение

Два эквивалентных определения квадрата:

Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Квадрат – это ромб, у которого один угол прямой.

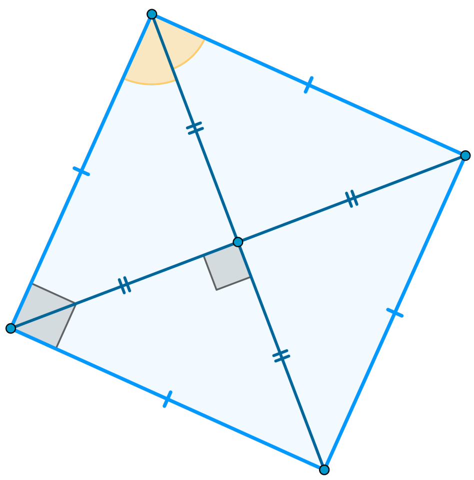
Свойства квадрата

Так как квадрат является прямоугольником и ромбом, то он обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба:

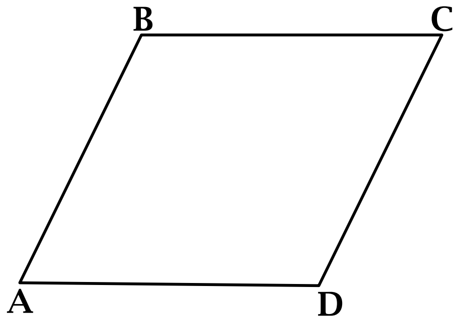
$\sim$ Все углы квадрата равны $90°$;

$\sim$ Все стороны квадрата равны;

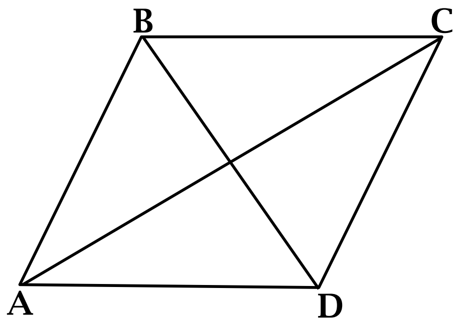
$\sim$ Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам.



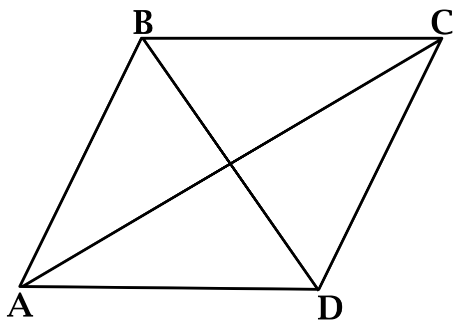
1. Острый угол ромба $ABCD$ равен $60°$, одна из его сторон равна 10. Найдите меньшую из диагоналей этого ромба.



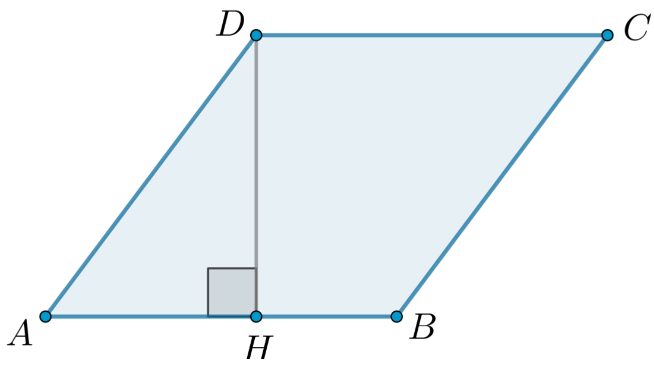
2. В ромбе $ABCD$: $\angle ACD = 26°$. Найдите $\angle ABD$. Ответ дайте в градусах.



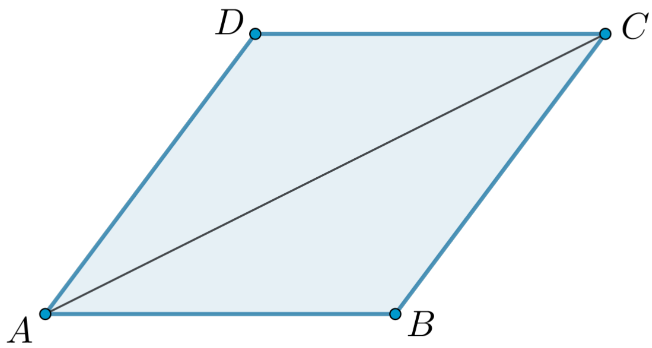
3. Найдите большую диагональ ромба $ABCD$, если $AB = 2\sqrt{3}$, а острый угол равен половине тупого.



4. Найдите высоту ромба, сторона которого равна $\sqrt{3}$, а острый угол равен $60°$.

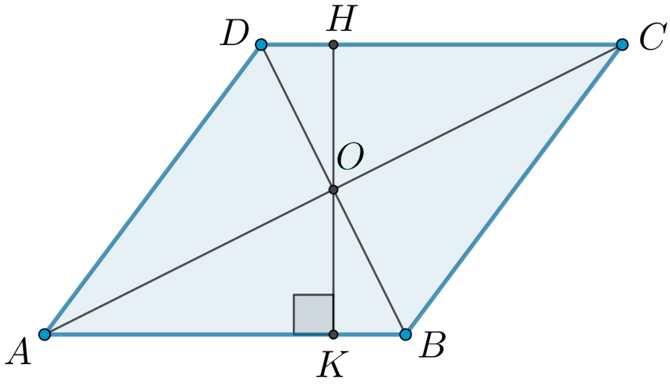


5. Найдите большую диагональ ромба, сторона которого равна $\sqrt{3}$, а острый угол равен $60°$.

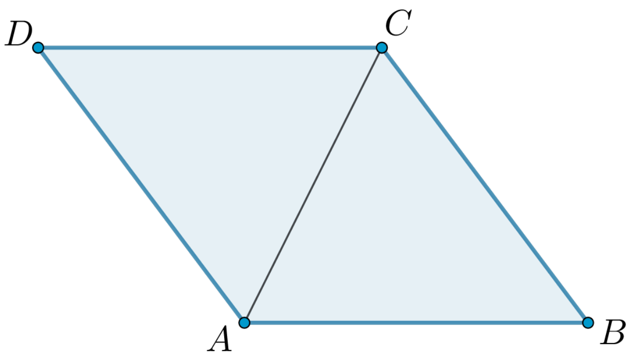


6. Расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника до прямой, содержащей его большую сторону, равно $2,5$. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

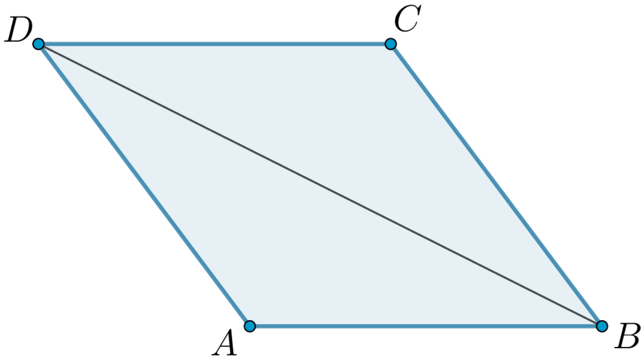
7. Диагонали ромба относятся как 4 : 3. Периметр ромба равен 200. Найдите высоту ромба.



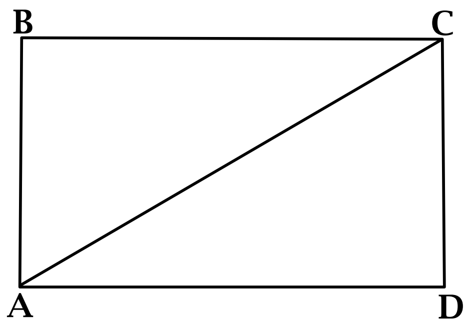
8. В ромбе $ABCD$ угол CDA равен $78°$. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



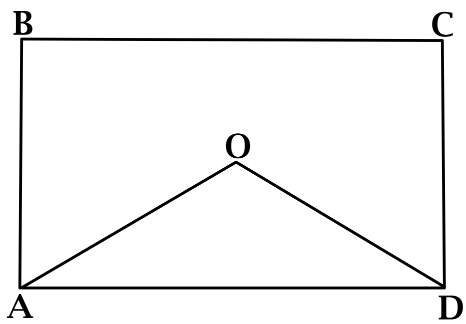
9. В ромбе $ABCD$ угол DAB равен $148°$. Найдите угол BDC. Ответ дайте в градусах.



10. В прямоугольнике $ABCD$ диагональ $AC = 2 \cdot CD$. Найдите разность $\angle BAC - \angle CAD$. Ответ дайте в градусах.



11. O – точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$, $\angle OAD = 28°$. Найдите $\angle AOD$. Ответ дайте в градусах.



1. **Ответ**. 10. **Решение**. Пусть $\angle A = 60^\circ$. В ромбе все стороны равны, тогда треугольник ABD – равнобедренный, у которого один из углов равен 60°, следовательно, треугольник ABD – равносторонний и $BD = 10$.

   Треугольник ABC – тупоугольный. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, тогда $AC > AB = BD$, значит, BD – меньшая из диагоналей.

2. **Ответ**. 64. **Решение**. В ромбе диагонали перпендикулярны, тогда $\angle CDB = 90^\circ - \angle ACD = 64^\circ$.

   $BC = CD$, тогда $\angle CBD = \angle CDB = 64^\circ$.

   Так как диагонали ромба делят его углы пополам, то $\angle ABD = \angle CBD = 64^\circ$.

3. **Ответ**. 6. **Решение**. Так как сумма односторонних углов при параллельных прямых и секущей равна 180°, то сумма острого и тупого углов ромба равна 180°.

   Так как в данном ромбе острый угол равен половине тупого, то острый угол ромба $ABCD$ равен 60°.

   Треугольник ABD – равнобедренный, один из углов которого равен 60°, тогда треугольник ABD – равносторонний и $BD = 2\sqrt{3}$.

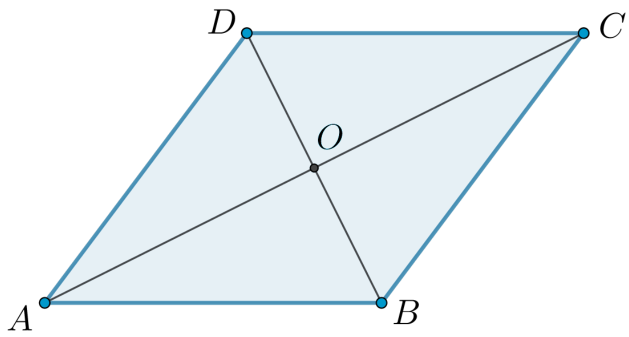
   Пусть O – точка пересечения диагоналей ромба, тогда $OD = 0,5BD = \sqrt{3}$, следовательно, по теореме Пифагора находим: $AO^2 + OD^2 = AD^2$, тогда $AO^2 + 3 = 12$, откуда находим $AO = 3$. В ромбе, как и в любом другом параллелограмме, диагонали точкой пересечения делятся пополам, значит, $AC = 6$.

4. **Ответ**. 1,5. **Решение**. $AD = \sqrt{3}$, $\angle A = 60^\circ$. Следовательно, $\angle ADH = 30^\circ$. Катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы, следовательно, $AH = 0,5AD = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда по теореме

Пифагора:

$$DH = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

5. **Ответ**. 3. **Решение**. $\angle A = 60^\circ$.
Проведем диагональ BD. Пусть $AC \cap BD = O$. Докажем, что AC – большая диагональ. Так как в ромбе, как и в параллело-

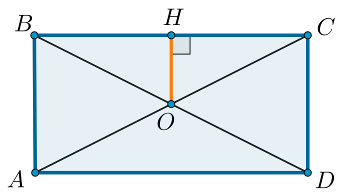


грамме, диагонали точкой пересечения делятся пополам, то $AO = 0,5AC$, $DO = 0,5BD$. Так как в ромбе диагонали являются биссектрисами углов и взаимно перпендикулярны, то $\angle DAO = 30^\circ$, $\angle AOD = 90^\circ$ и соответственно $\angle ADO = 60^\circ$. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, следовательно, $AO > DO$, значит, AC – большая диагональ.

Катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы, следовательно, $DO = 0,5AD = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда по теореме Пифагора:

$$AO = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad AC = 3$$

6. **Ответ**. 5. **Решение**.



Рассмотрим прямоугольник $ABCD$. Пусть O – точка пересечения диагоналей, $OH = 2,5$ – расстояние от точки O до большей

стороны.
Т.к. диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам, то $BO = CO$. Следовательно, $\triangle BOH = \triangle COH$ как прямоугольные по катету и гипотенузе. Следовательно, $BH = CH$. Таким образом, OH – средняя линия в $\triangle ABC$, следовательно, она равна половине AB. Значит, $AB = 2 \cdot 2,5 = 5$.

7. **Ответ**. 48. **Решение**. Отрезок HK – высота ромба. Так как $AB \parallel DC$ и $HK \perp AB$, то $HK \perp DC$.

1 способ

Так как диагонали ромба делят его на 4 равных прямоугольных треугольника, а у равных треугольников высоты, опущенные к равным сторонам, равны, то $OK = OH$.
Рассмотрим $\triangle AOB$. Так как $AC : BD = 4 : 3$, то также $AO : BO = 4 : 3$. Пусть $AO = 4x, BO = 3x$. Следовательно, $AB = \sqrt{(4x)^2 + (3x)^2} = 5x$.
Так как у ромба все стороны равны, то его сторона равна $200 : 4 = 50$, следовательно, $5x = 50$ и $x = 10$.
Высота прямоугольного треугольника AOB, опущенная из вершины прямого угла O, равна $AO \cdot OB : AB$, следовательно,

$$OK = \frac{4x \cdot 3x}{5x} = \frac{12}{5}x = 24 \quad \Rightarrow \quad HK = 24 \cdot 2 = 48$$

2 способ

Так как у ромба все стороны равны, то его сторона равна $AB = 200 : 4 = 50$. Следовательно, площадь ромба равна $S = 50HK$ (произведение стороны на высоту, проведенную к этой стороне).
Так как $AC : BD = 4 : 3$, то можно принять $AC = 4a, BD = 3a$.
Так как площадь ромба равна полупроизведению диагоналей, то $S = 0,5 \cdot 4a \cdot 3a = 6a^2$, следовательно,

$$50HK = 6a^2 \quad \Rightarrow \quad HK = \frac{3}{25}a^2$$

Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, то по теореме Пифагора из $\triangle AOB$:

$$\left(\frac{3}{2}a\right)^2 + (2a)^2 = AB^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 400$$

Следовательно,

$$HK = \frac{3}{25} \cdot 400 = 48$$

8. **Ответ**. 51. **Решение**. Так как в ромбе диагонали являются биссектрисами углов, то $\angle ACB = \angle ACD$. Так как у ромба все стороны равны, то $AD = DC$, следовательно, $\angle CAD = \angle ACD = x$. Тогда $x + x + \angle CDA = 180°$, откуда

$$x = (180° - 78°) : 2 = 51°$$

9. **Ответ**. 16. **Решение**. Так как в ромбе диагонали являются биссектрисами углов, то $\angle BDC = \angle BDA$. Так как у ромба все стороны равны, то $AD = AB$, следовательно, $\angle BDA = \angle DBA = x$. Тогда $x + x + \angle DAB = 180°$, откуда

$$x = (180° - 148°) : 2 = 16°$$

10. **Ответ**. 30. **Решение**. Треугольник ACD – прямоугольный, причём в нём катет равен половине гипотенузы, значит этот катет лежит против угла в $30°$, то есть $\angle CAD = 30°$.

    $\angle BAC = 90° - \angle CAD = 60°$, тогда $\angle BAC - \angle CAD = 60° - 30° = 30°$.

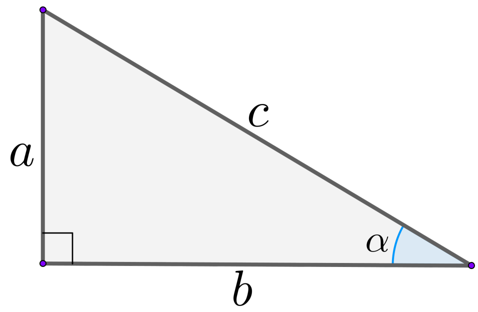
11. **Ответ**. 124. **Решение**. В прямоугольнике диагонали пересекаются, точкой пересечения делятся пополам и равны, тогда $AO = OD$, следовательно, $\angle ADO = \angle OAD = 28°$, тогда $\angle AOD = 180° - 2 \cdot 28° = 124°$.

Урок 12. Тригонометрия

Определения

Синус острого угла в прямоугольном треугольнике – это отношение противолежащего этому углу катета к гипотенузе: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$

Косинус острого угла в прямоугольном треугольнике – это отношение прилежащего этому углу катета к гипотенузе: $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$



Тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике – это отношение противолежащего этому углу катета к прилежащему катету: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$

Котангенс острого угла в прямоугольном треугольнике – это отношение прилежащего этому углу катета к противолежащему катету: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$

Утверждение

Синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы равных углов соответственно равны.

Теорема

Из определений синуса, косинуса, тангенса и котангенса вытекают следующие формулы:

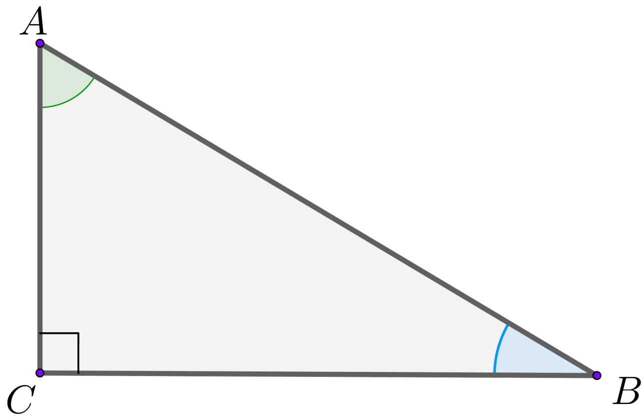
$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 & \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \\[2ex] \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} & \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{array}}$$

Утверждение

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом $\angle C$:

$\sin\angle A = \cos\angle B$

$\operatorname{tg}\angle A = \operatorname{ctg}\angle B$



Доказательство

Утверждение следует непосредственно из определений синуса и косинуса, а также тангенса и котангенса острого угла в прямоугольном треугольнике.

Теорема

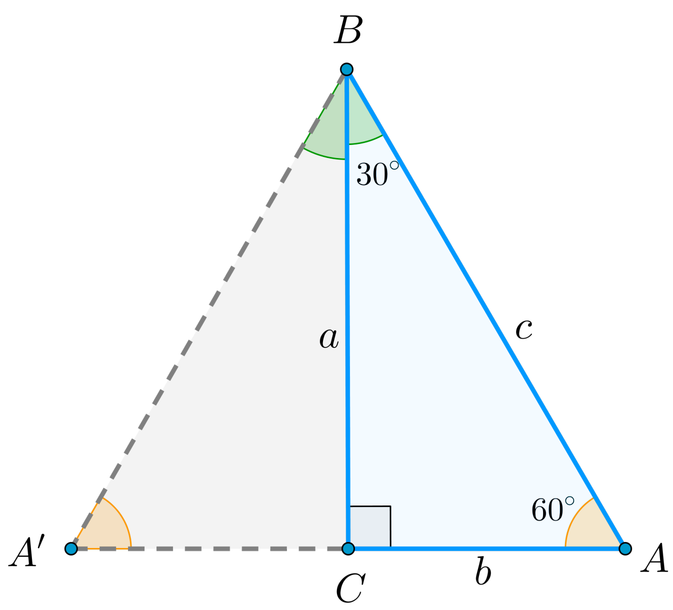
Для углов $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ верна следующая таблица:

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Знак "—" означает, что в данном угле тригонометрическая функция не существует.

Доказательство

1) Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC: $\angle C = 90°, \angle A = 60°, \angle B = 30°$.



На стороне BC построим равный ему треугольник $A'BC$, как показано на рисунке.

Полученный треугольник $A'BA$ является правильным, т.к. $\angle A' =$

$\angle A = \angle A'BA = 60°$.

Следовательно, $A'A = 2b = AB = c$, откуда $b = \dfrac{1}{2}c$.

Тогда по теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$.

а) Теперь по определению $\sin\angle A = \sin 60° = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

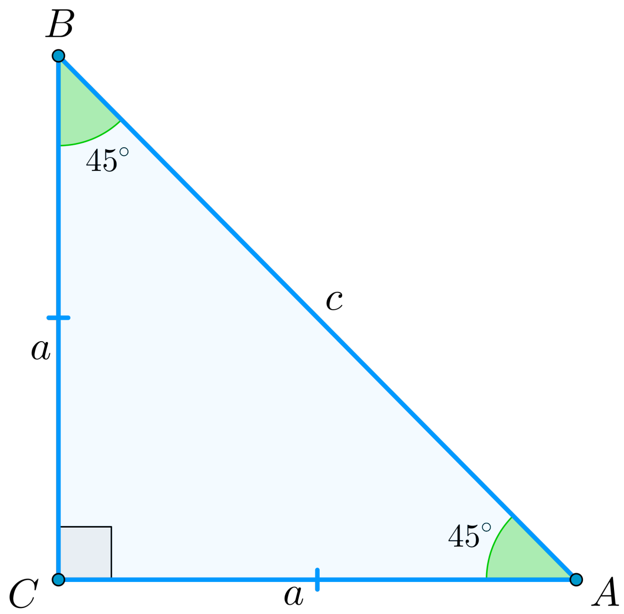
Т.к. по предыдущему утверждению $\sin\angle A = \cos\angle B$, то $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Т.к. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, то $\operatorname{tg} 30° = \operatorname{ctg} 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, а $\operatorname{tg} 60° = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$.

б) Аналогично по определению $\cos\angle A = \cos 60° = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\frac{1}{2}c}{c} = \dfrac{1}{2}$.

$\cos\angle A = \sin\angle B = \sin\angle 30° = \dfrac{1}{2}$.

2) Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC: $\angle C = 90°, \angle A = 45°, \angle B = 45°$.



Этот треугольник равнобедренный, следовательно, $BC = AC = a$.

Тогда по теореме Пифагора $a^2 + a^2 = c^2 \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}c$.

Следовательно, $\sin\angle A = \cos\angle A = \sin\angle B = \cos\angle B = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Из определения следует, что $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$.

Замечание

Для простоты запоминания таблицы можно записать ее в следующем виде:

	30°	45°	60°
sin	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
tg	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

То есть для синуса и косинуса число выглядит как $\dfrac{\sqrt{\ }}{2}$, где у синуса под корнем пишется $1, 2, 3$, у косинуса – наоборот.

Теорема

Справедливы следующие формулы приведения:

$$\begin{gathered}
\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \\
\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \\
\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \\
\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha
\end{gathered}$$

Таким образом, если α – острый угол, то с помощью этих формул можно найти синус, косинус, тангенс или котангенс тупого угла, смежного с α.

Задачи для аудиторной работы

---

1. Дан прямоугольный треугольник ABC, причем $\angle C = 90°$. Известно, что $\cos\angle B = \dfrac{1}{3}$, $AB = 9$. Найдите BC.

2. Дан треугольник ABC, причем $\angle C = 90°$. Найдите длину его гипотенузы, если $AC = 8$, $\cos\angle A = \dfrac{4}{5}$.

3. Дан прямоугольный треугольник YES с гипотенузой YE. Найдите $\cos\angle E$, если $\sin\angle Y = 0,8$.

4. Дан треугольник YES, причем $\angle S = 90°$. Известно, что $\operatorname{tg}\angle Y = 1,5$. Найдите $\operatorname{ctg}\angle E$.

5. Дан треугольник YES, причем $\angle S$ — прямой. Найдите синус угла E, если синус угла Y равен $\dfrac{3}{5}$.

6. Дан треугольник YES, причем $YS \perp ES$. Найдите $\operatorname{tg}\angle Y$, если $\operatorname{tg}\angle E = 4$.

7. Дан прямоугольный треугольник CAT, причем $\angle C = 90°$, а CH – высота этого треугольника.
Известно, что $\sin\angle ACH = \frac{2}{5}$, $AT = 8$. Найдите AH.

8. Дан прямоугольный $\triangle CAT$ с острыми углами A и T. Точка H – такая точка на стороне AT, что $\cos\angle ACH = \cos\angle ATC = 0,2$. Найдите HT, если известно, что $AT = 2,5$.

9. В прямоугольном треугольнике CAT из вершины C прямого угла опущена высота CH. Известно, что $TH = 12, CH = 5$. Найдите $13\sin\angle A$.

Задачи для домашней работы

---

10. В треугольнике ABC сторона $AC = 12$, $\operatorname{tg} A = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Найдите высоту CH.

11. В треугольнике ABC: $\angle C = 90^\circ$, $\sin \angle BAC = \dfrac{2}{3}$. Найдите AC, если $AB = 6\sqrt{5}$.

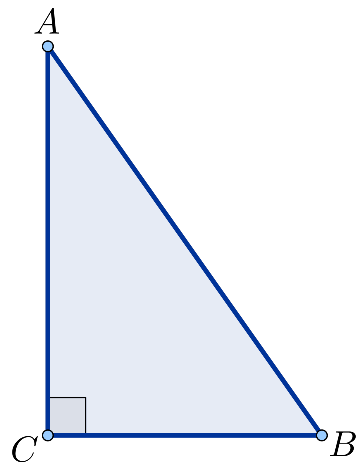
12. В параллелограмме $ABCD$: $AB = 15$, $\sin \angle D = 0,4$. Найдите длину h – высоты, опущенной из вершины B на сторону AD.

13. В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $BC : AB = 2 : 1$, AC – диагональ. Найдите отношение косинуса угла CAD к косинусу угла ACD.

14. В треугольнике ABC: $\angle A = 90^\circ$, $\operatorname{ctg} \angle B = 0,6$. Площадь треугольника ABC равна $7,5$. Найдите $AB + AC$.

15. В четырёхугольнике $ABCD$: $AD = 5$, $AD \parallel BC$, BD перпендикулярна к AD, $\sin \angle A = \cos \angle A$, $\sin \angle C = \frac{5}{\sqrt{34}}$. Найдите BC.

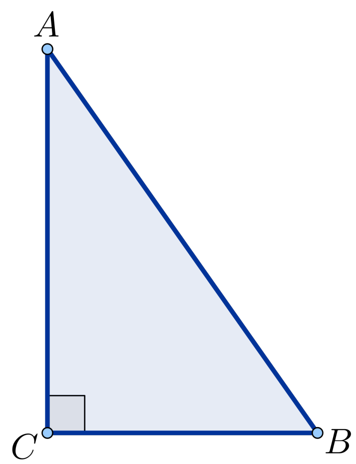
1. **Ответ**. 3. **Решение**.



По определению косинуса

$$\cos\angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad BC = \frac{1}{3}\cdot AB = \frac{1}{3}\cdot 9 = 3$$

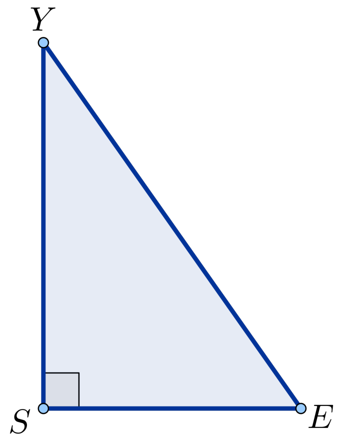
2. **Ответ**. 10. **Решение**.



По определению косинуса

$$\cos\angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad AB = AC\cdot\frac{5}{4} = 10$$

3. **Ответ**. 0,8. **Решение**.

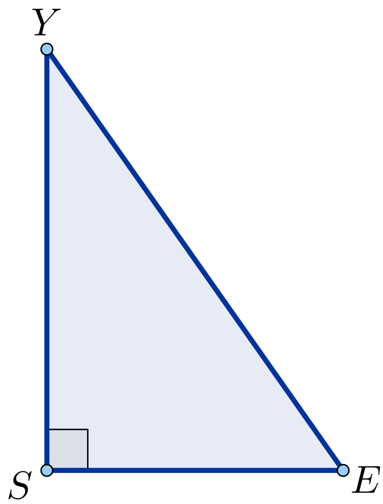


По определению синуса и косинуса:

$$\sin \angle Y = \frac{ES}{YE} \qquad \text{и} \qquad \cos \angle E = \frac{ES}{YE}$$

Таким образом мы видим, что $\cos \angle E = \sin \angle Y = 0,8$.

4. **Ответ**. 1,5. **Решение**.

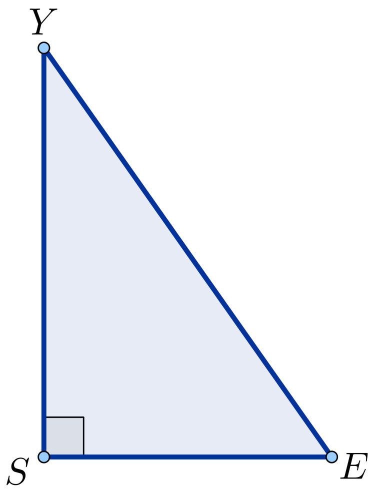


По определению тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg} \angle Y = \frac{ES}{YS} \qquad \text{и} \qquad \operatorname{ctg} \angle E = \frac{ES}{YS}$$

Таким образом мы видим, что $\operatorname{tg} \angle Y = \operatorname{ctg} \angle E = 1,5$.

5. **Ответ**. 0,8. **Решение**.



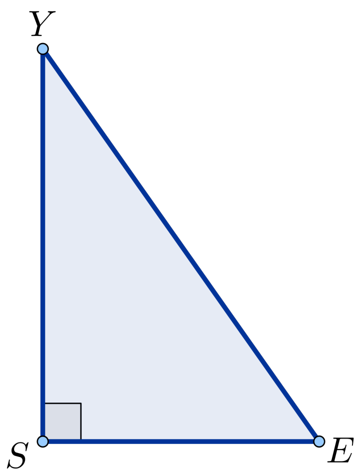
По определению синуса:

$$\sin \angle E = \frac{YS}{YE} = \cos \angle Y$$

Т.к. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ для любого угла α, то $\cos^2 \angle Y = 1 - (0,6)^2 = 0,64$, следовательно, $\cos \angle Y = 0,8$.

Значит и $\sin \angle E = 0,8$.

6. **Ответ**. 0,25. **Решение**.



По определению тангенса:

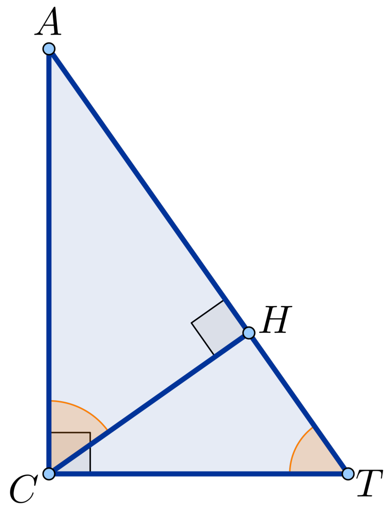
$$\operatorname{tg} \angle Y = \frac{ES}{YS} = \operatorname{ctg} \angle E$$

Т.к. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ для любого угла α, то

$$\operatorname{ctg}\angle E = \frac{1}{\operatorname{tg}\angle E} = \frac{1}{4}$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\angle Y = \frac{1}{4} = 0,25$.

7. **Ответ**. 1,28. **Решение**.



По определению синуса $\sin\angle ACH = \dfrac{AH}{AC}$. Для того, чтобы найти AH, необходимо найти AC.

Т.к. высота прямоугольного треугольника CAT, опущенная из вершины прямого угла, делит его на два треугольника, каждый из которых подобен $\triangle CAT$, то $\angle ACH = \angle ATC$. Значит, и $\sin\angle ACH = \sin\angle ATC = \frac{2}{5}$.

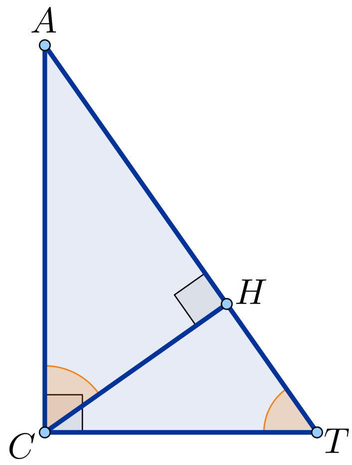
Но по определению

$$\sin\angle ATC = \frac{AC}{AT} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5} = \frac{AC}{8} \quad \Leftrightarrow \quad AC = \frac{16}{5}$$

Значит,

$$\frac{2}{5} = \frac{AH}{AC} \quad \Rightarrow \quad AH = AC \cdot \frac{2}{5} = \frac{32}{25} = 1,28.$$

8. **Ответ**. 0,1. **Решение**.



Т.к. косинусы углов ACH и ATC равны, то равны и эти углы (т.к. это углы треугольников). Следовательно, $\triangle ACH \sim \triangle CAT$ по двум углам ($\angle ACH = \angle ATC$, $\angle A$ – общий). Следовательно, $\angle AHC = \angle ACT = 90°$, то есть $\triangle ACH$ тоже прямоугольный.

По свойству прямоугольного треугольника и высоты, опущенной из вершины его прямого угла, $\triangle CHT \sim \triangle CAT$.

По определению косинуса $\cos\angle CTH = \dfrac{HT}{CT}$. Следовательно, необходимо найти CT.

Из треугольника CAT:

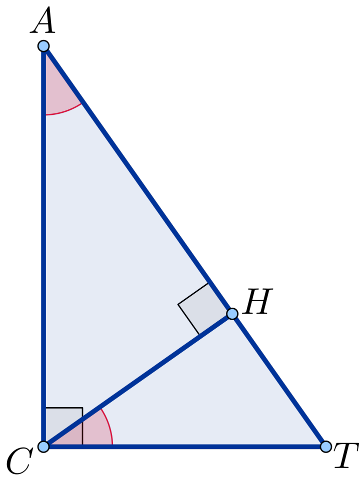
$$\cos\angle ATC = \frac{CT}{AT} = 0,2 \quad \Rightarrow \quad CT = AT \cdot 0,2 = 2,5 \cdot 0,2 = 0,5$$

Следовательно,

$$HT = CT \cdot \cos\angle CTH = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1.$$

9. **Ответ**. 12. **Решение**.

По свойству прямоугольного треугольника и высоты, опущенной из его прямого угла, $\triangle CHT \sim \triangle CAT$. Значит, $\angle HCT = \angle A$. Поэтому будем искать $\sin\angle HCT$.



Из треугольника HCT:

$$\sin \angle HCT = \frac{TH}{TC}$$

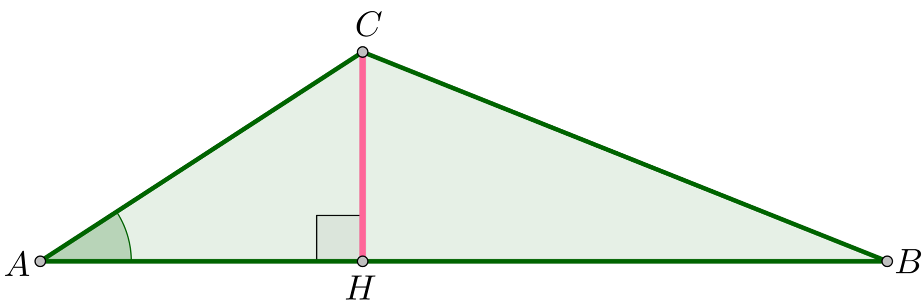
По теореме Пифагора из этого же треугольника мы можем найти TC:

$$TC = \sqrt{TH^2 + CH^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

Следовательно,

$$\sin \angle A = \sin \angle HCT = \frac{12}{13} \quad \Rightarrow \quad 13 \sin \angle A = 12.$$

10. **Ответ**. 4. **Решение**.



Рассмотрим прямоугольный $\triangle ACH$. Так как тангенс – это отношение противолежащего катета к прилежащему, то

$$\frac{CH}{AH} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

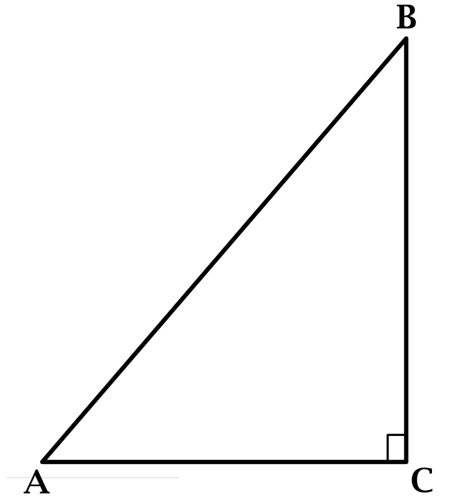
Следовательно, можно принять $CH = \sqrt{2}x$, $AH = 4x$, где x – некоторое положительное число. Тогда по теореме Пифагора из этого же треугольника

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \quad \Rightarrow \quad 144 = 2x^2 + 16x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 2\sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$CH = \sqrt{2}x = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4.$$

11. **Ответ**. 10. **Решение**. Синус острого угла в прямоугольном тре-

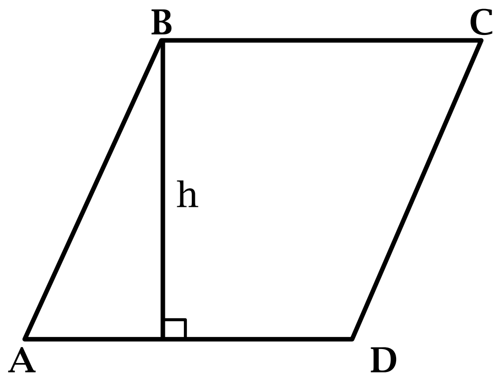


угольнике равен отношению противолежащего этому углу катета к гипотенузе, тогда

$$\frac{BC}{AB} = \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad BC = \frac{2}{3}AB = 4\sqrt{5}.$$

По теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 36 \cdot 5 - 16 \cdot 5 = 20 \cdot 5 = 10^2$, тогда $AC = 10$.

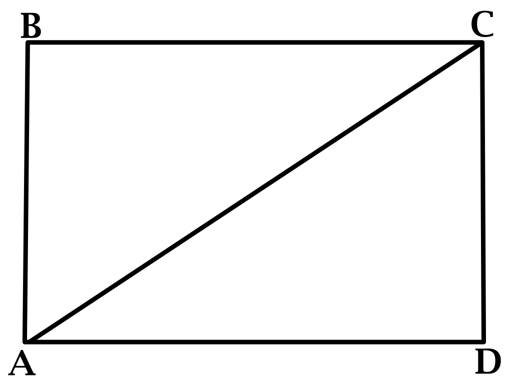
12. **Ответ**. 6. **Решение**. В параллелограмме сумма односторонних углов равна $180°$, тогда $\sin\angle A = \sin(\pi - \angle D) = \sin\angle D = 0,4$.



Синус острого угла в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего этому углу катета к гипотенузе, тогда

$$0,4 = \frac{h}{AB} = \frac{h}{15} \qquad \Rightarrow \qquad h = 6.$$

13. **Ответ**. 2. **Решение**. По определению косинуса и синуса острого



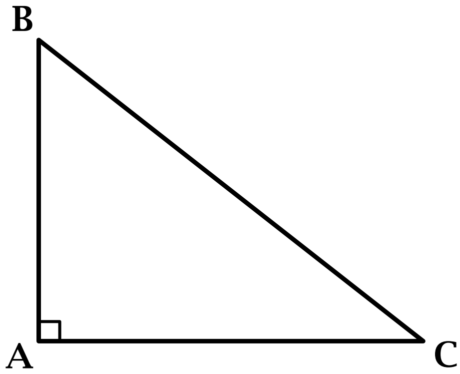
угла в прямоугольном треугольнике получаем, что $\cos\angle ACD = \sin\angle CAD$, тогда

$$\frac{\cos\angle CAD}{\cos\angle ACD} = \frac{\cos\angle CAD}{\sin\angle CAD} = \operatorname{ctg}\angle CAD = \frac{AD}{CD} = \frac{BC}{AB} = 2.$$

14. **Ответ**. 8. **Решение**.

$$0,6 = \operatorname{ctg}\angle B = \frac{AB}{AC}.$$

Площадь треугольника ABC равна $7,5$, тогда $7,5 = 0,5 \cdot AB \cdot AC$.

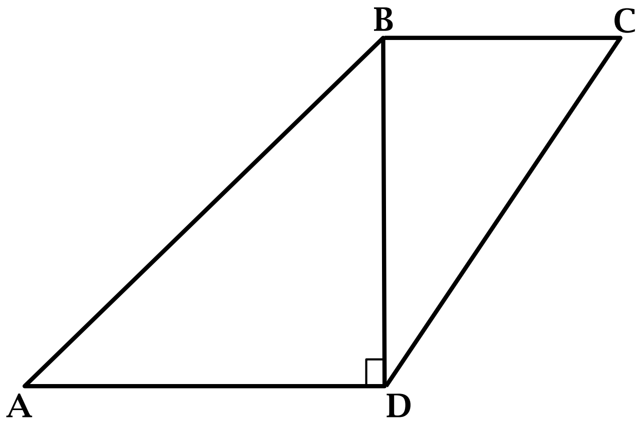


Таким образом,

$$\frac{AB}{AC} = 0,6, \qquad AB \cdot AC = 15.$$

Перемножая равенства, получим $AB^2 = 9$, тогда $AB = 3$, $AC = 5$, значит, $AB + AC = 8$.

15. **Ответ**. 3. **Решение**.



Треугольник ABD – прямоугольный, тогда $\angle A$ – острый. В силу основного тригонометрического тождества (для любого угла α выполнено $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$) из равенства $\sin\angle A = \cos\angle A$ получаем, что

$$\sin\angle A = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

но $\angle A$ – острый, тогда

$$\sin \angle A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и, значит, $\angle A = 45°$.

$\angle ABD = 90° - \angle A = 45° = \angle A$, тогда треугольник ABD – равнобедренный и $BD = AD = 5$.

$AD || BC$, BD перпендикулярна к AD, тогда BD перпендикулярна и к BC.

Так как синус острого угла в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего этому углу катета к гипотенузе, то

$$\frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5}{CD} \qquad \Rightarrow \qquad CD = \sqrt{34}.$$

По теореме Пифагора $BC^2 = CD^2 - BD^2 = 34 - 25 = 9 = 3^2$, тогда $BC = 3$.

Урок 13. Основные формулы площади четырехугольников и треугольников

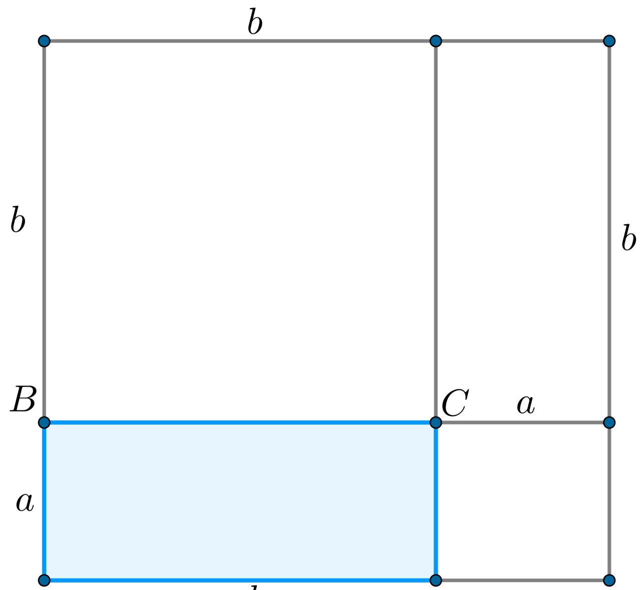
Можно сказать, что площадь многоугольника — это величина, обозначающая часть плоскости, которую занимает данный многоугольник. За единицу измерения площади принимают площадь квадрата со стороной 1 см, 1 мм и т.д. (единичный квадрат). Тогда площадь будет измеряться в см^2, мм^2 соответственно.

Иными словами, можно сказать, что площадь фигуры — это величина, численное значение которой показывает, сколько раз единичный квадрат умещается в данной фигуре.

Свойства площади

1. Площадь любого многоугольника — величина положительная.
2. Равные многоугольники имеют равные площади.
3. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.
4. Площадь квадрата со стороной a равна a^2.

Площадь прямоугольника и параллелограмма



Теорема: площадь прямоугольника

Площадь прямоугольника со сторонами a и b равна $S = ab$.

Доказательство

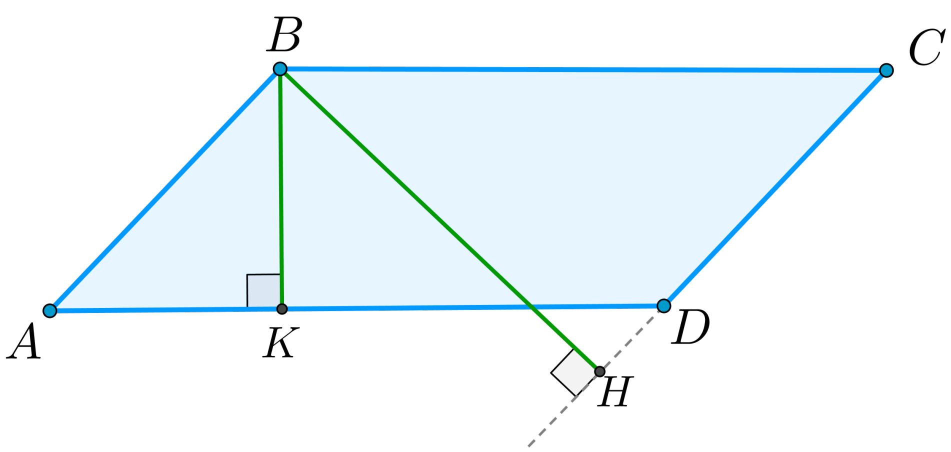
Достроим прямоугольник $ABCD$ до квадрата со стороной $a + b$, как показано на рисунке. Данный квадрат состоит из прямоугольника $ABCD$, еще одного равного ему прямоугольника и двух квадратов со сторонами a и b. Таким образом,

$$S_{a+b} = 2S_{\text{пр-к}} + S_a + S_b \Leftrightarrow (a+b)^2 = 2S_{\text{пр-к}} + a^2 + b^2 \Leftrightarrow$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2S_{\text{пр-к}} + a^2 + b^2 \Rightarrow S_{\text{пр-к}} = ab$$

Определение

Высота параллелограмма — это перпендикуляр, проведенный из вершины параллелограмма к стороне (или к продолжению стороны), не содержащей эту вершину.

Например, высота BK падает на сторону AD, а высота BH — на продолжение стороны CD:



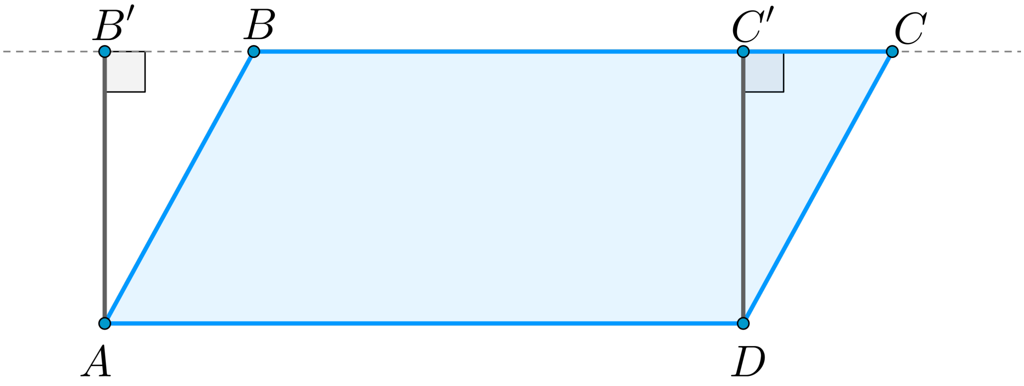
Теорема: площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению высоты и стороны, к которой проведена эта высота.

Доказательство

Проведем перпендикуляры AB' и DC', как показано на рисунке. Заметим,что эти перпендикуляры равны высоте параллелограмма $ABCD$.

Тогда $AB'C'D$ – прямоугольник, следовательно, $S_{AB'C'D} = AB' \cdot$



AD.

Заметим, что прямоугольные треугольники ABB' и DCC' равны. Таким образом,

$$S_{ABCD} = S_{ABC'D} + S_{DCC'} = S_{ABC'D} + S_{ABB'} = S_{AB'C'D} = AB' \cdot AD.$$

Площадь треугольника

Определение

Будем называть сторону, к которой в треугольнике проведена высота, основанием треугольника.

Теорема

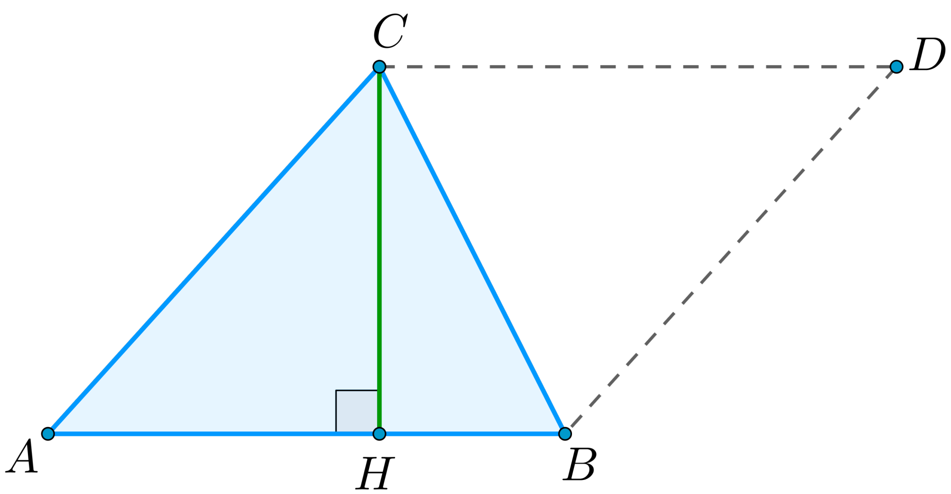
Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту, проведенную к этому основанию.

Доказательство

Пусть S – площадь треугольника ABC. Примем сторону AB за основание треугольника и проведём высоту CH. Докажем, что

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CH.$$

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ так, как показано на рисунке: Треугольники ABC и DCB равны по трем



сторонам (BC – их общая сторона, $AB = CD$ и $AC = BD$ как противоположные стороны параллелограмма $ABDC$), поэтому их площади равны. Следовательно, площадь S треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABDC$, то есть $S = \dfrac{1}{2}AB \cdot CH$.

Теорема

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов.

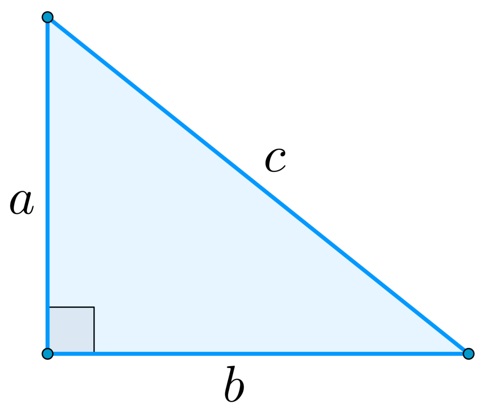
Доказательство

Данный факт напрямую следует из предыдущей теоремы. Если один из катетов прямоугольного треугольника принять за основание, то тогда второй катет является совпадает с высотой, проведенной к этому основанию.

Из доказанной выше формулы площади треугольника следует прекрасная теорема:

Теорема Пифагора (прямая и обратная)

1. В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов:



$$c^2 = a^2 + b^2$$

2. Верно и обратное: если в треугольнике квадрат длины одной стороны равен сумме квадратов длин других двух сторон, то такой треугольник прямоугольный.

Площадь ромба и трапеции

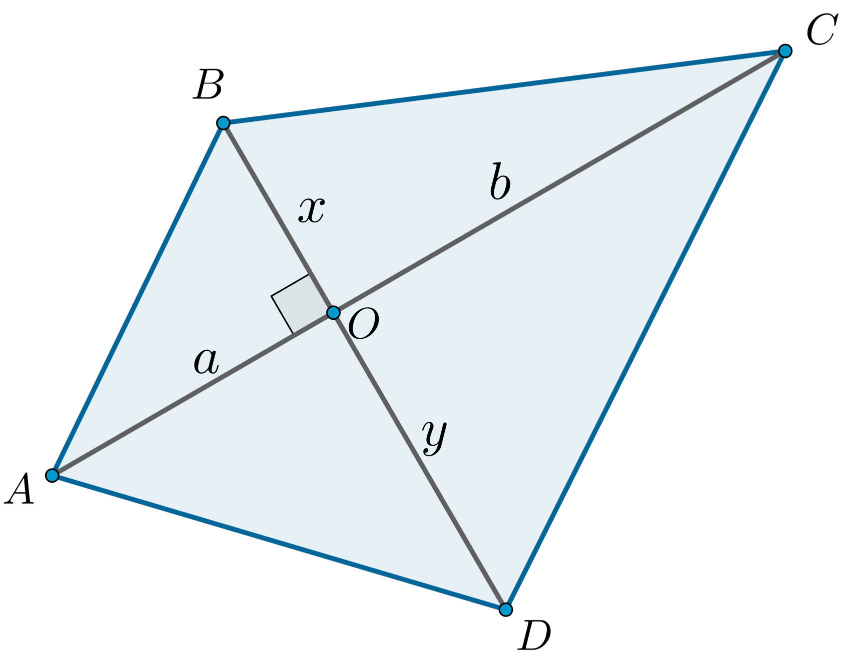
Так как ромб является параллелограммом, то для него верна та же формула, то есть площадь ромба равна произведению высоты и стороны, к которой проведена эта высота.

Теорема

Площадь выпуклого четырехугольника, диагонали которого перпендикулярны, равна половине произведения диагоналей.

Доказательство

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$. Обозначим $AO = a, CO = b, BO = x, DO = y$:



Заметим, что данный четырехугольник составлен из четырех прямоугольных треугольников, следовательно, его площадь равна сумме площадей этих треугольников:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}xb + \frac{1}{2}by + \frac{1}{2}ay = \frac{1}{2}(ax + xb + by + ay) = \frac{1}{2}((a+b)x + (a+b)y) = \frac{1}{2}(a+b)(x+y)$$

Следствие: площадь ромба

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей:

$$S_{\text{ромб}} = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$$

Определение

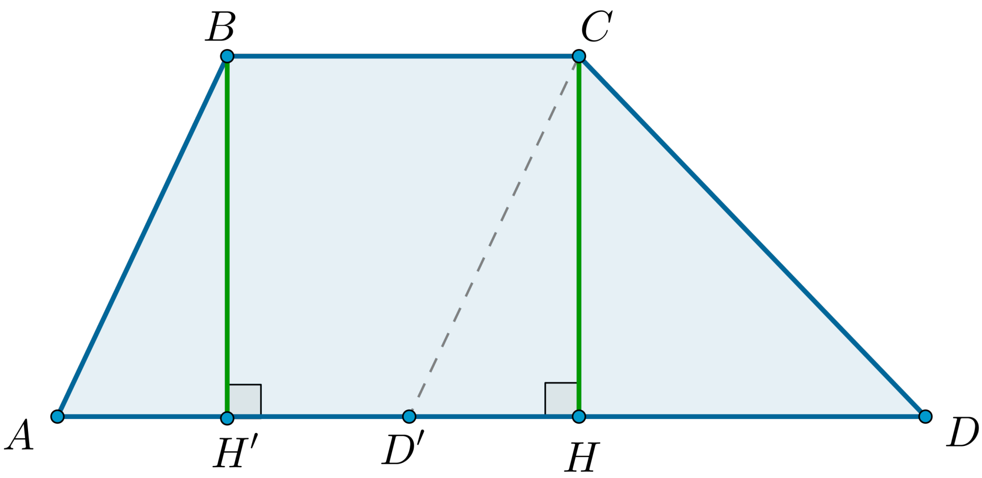
Высота трапеции – это перпендикуляр, проведенный из вершины одного основания к другому основанию.

Теорема: площадь трапеции

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

Доказательство

Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD. Проведем $CD' \parallel AB$, как показано на рисунке:



Тогда $ABCD'$ – параллелограмм.

Проведем также $BH' \perp AD, CH \perp AD$ $(BH' = CH$ – высоты трапеции).

Тогда $S_{ABCD'} = BH' \cdot AD' = BH' \cdot BC, \quad S_{CDD'} = \dfrac{1}{2}CH \cdot D'D$

Т.к. трапеция состоит из параллелограмма $ABCD'$ и треугольника CDD', то ее площадь равна сумме площадей параллелограмма и треугольника, то есть:

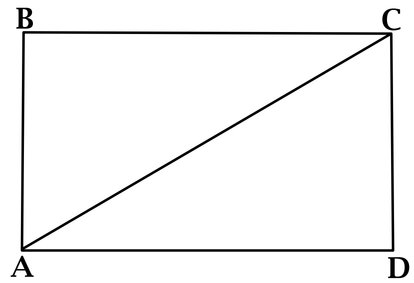
$$S_{ABCD} = S_{ABCD'} + S_{CDD'} = BH' \cdot BC + \frac{1}{2}CH \cdot D'D = \frac{1}{2}CH\left(2BC + D'D\right) =$$

$$= \frac{1}{2}CH\left(BC + AD' + D'D\right) = \frac{1}{2}CH\left(BC + AD\right)$$

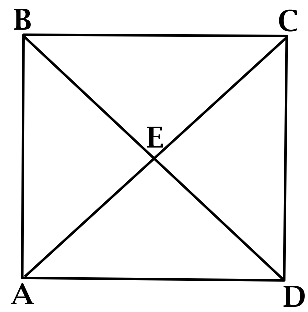
Задачи для аудиторной работы

1. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 26, а его площадь равна 40. Найдите разность большей и меньшей сторон этого прямоугольника.

2. В прямоугольнике $ABCD$: $AB = \frac{2}{5}BC$, периметр $ABCD$ равен 42. Найдите площадь треугольника ABC.



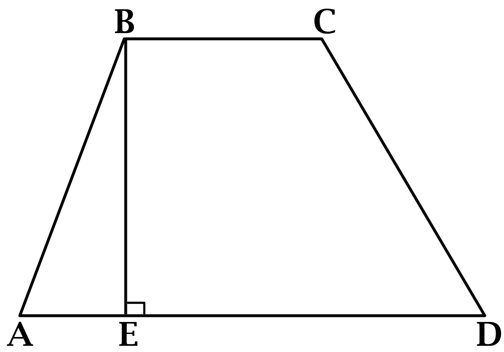
3. В квадрате $ABCD$ расстояние от точки пересечения диагоналей до одной из его сторон равно 5. Найдите площадь этого квадрата.



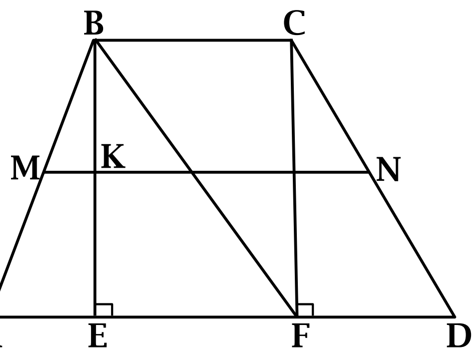
4. Найдите площадь ромба, если его высота равна 2, а острый угол равен 30°.

5. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 4 и 12.

6. В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = 5$ и $AD = 2 \cdot BC$ проведена высота BE. Найдите отношение площади трапеции к длине этой высоты.

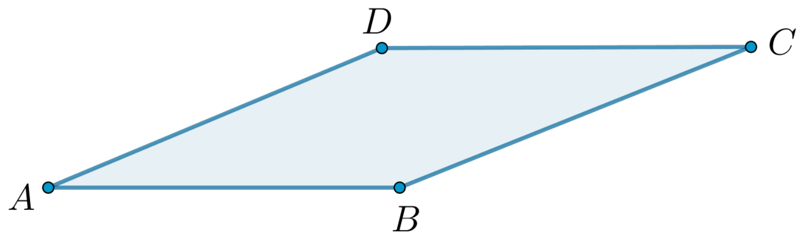


7. В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = 3$ и $AD > BC$ проведены высоты BE и CF. BE пересекает среднюю линию MN в точке K. Известно, что $MK = 1$, $DF = 2,4$, $BF = 5$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

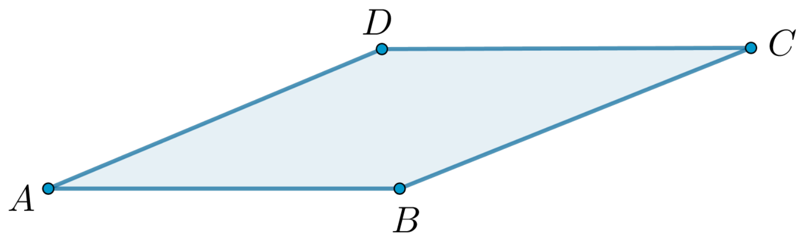


8. Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны соответственно 20 и 12, одна из боковых сторон равна 10, площадь трапеции $ABCD$ равна 80. Найдите острый угол трапеции $ABCD$, который образует эта боковая сторона с одним из оснований. Ответ дайте в градусах.

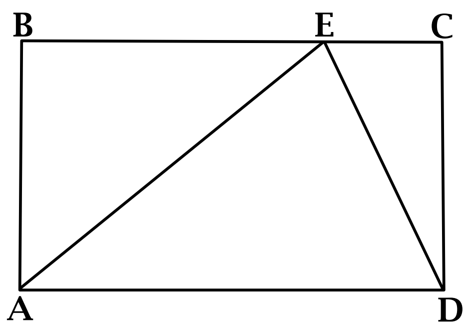
9. Площадь ромба равна 18. Одна из его диагоналей равна 12. Найдите другую диагональ.



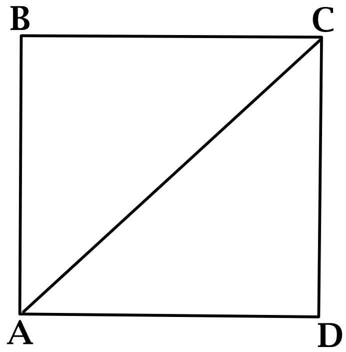
10. Площадь ромба равна 6. Одна из его диагоналей в три раза больше другой. Найдите меньшую диагональ.



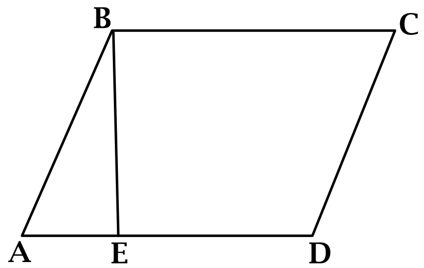
11. Точка E лежит на стороне BC прямоугольника $ABCD$. Площадь треугольника AED равна 3. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$.



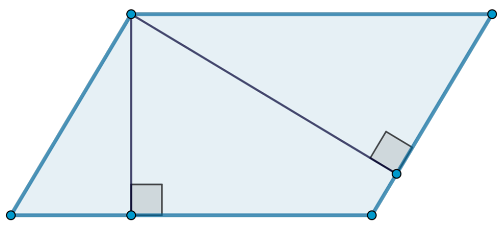
12. Найдите площадь квадрата $ABCD$, если $AC = 10$.



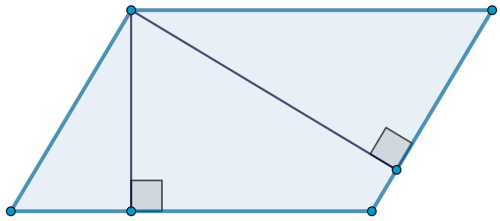
13. В параллелограмме $ABCD$: BE – высота, $BE = ED = 5$. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 35. Найдите длину AE.



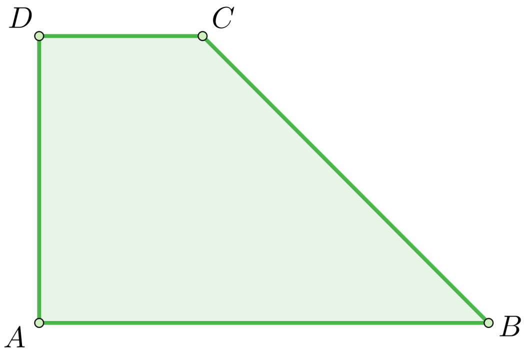
14. Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, опущенная на первую сторону, равна 10. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.



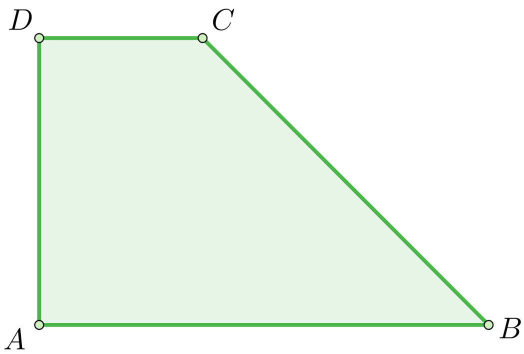
15. Площадь параллелограмма равна 40, две его стороны равны 5 и 10. Найдите большую высоту параллелограмма.



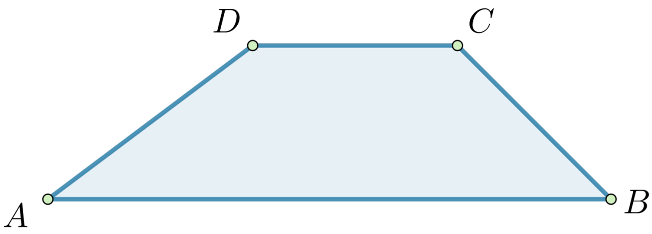
16. Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 6 и 2, большая боковая сторона составляет с основанием угол 45°.



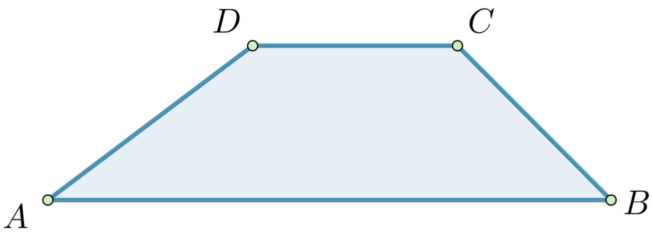
17. Основания прямоугольной трапеции равны 12 и 4. Ее площадь равна 64. Найдите острый угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



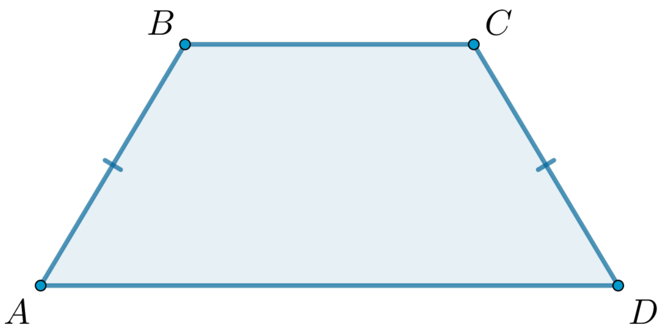
18. Основания трапеции равны 18 и 6, боковая сторона, равная 7, образует с одним из оснований угол 150°. Найдите площадь трапеции.



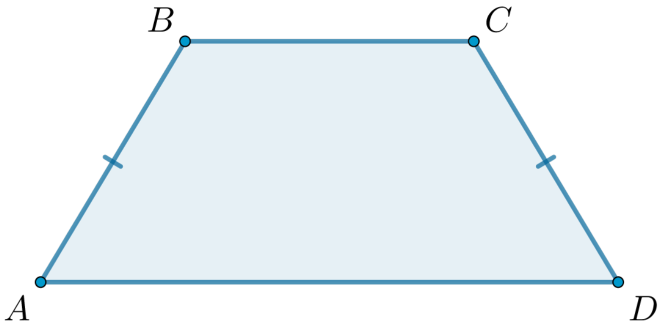
19. Основания трапеции равны 27 и 9, боковая сторона равна 8. Площадь трапеции равна 72. Найдите острый угол трапеции, прилежащий к данной боковой стороне. Ответ дайте в градусах.



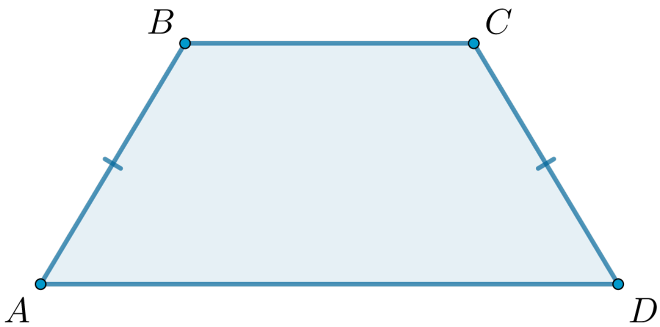
20. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее боковые стороны равны 10. Найдите площадь трапеции.



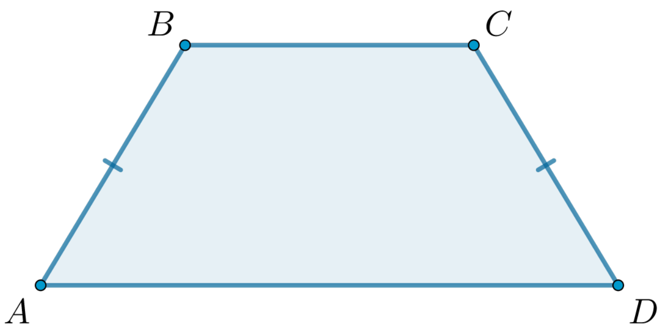
21. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, а ее площадь равна 40. Найдите боковую сторону трапеции.



22. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее периметр равен 60. Найдите площадь трапеции.



23. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, а ее площадь равна 40. Найдите периметр трапеции.



1. **Ответ**. 3. **Решение**. Так как прямоугольник является частным случаем параллелограмма, то у него противоположные стороны равны.

   Обозначим длину прямоугольника за a, а его ширину за b, тогда $a \cdot b = 40$, $a + b + a + b = 2(a + b) = 26$, откуда $b = 13 - a$ и, значит, $a \cdot (13 - a) = 40$, что равносильно $a^2 - 13a + 40 = 0$. Дискриминант $D = 13^2 - 4 \cdot 40 = 9 = 3^2$, корни $a_1 = 0,5(13 + 3) = 8,\ a_2 = 0,5(13 - 3) = 5$. При $a = 5$ получаем $b = 8$, но $a \geq b$, тогда $a = 8,\ b = 5$ и разность большей и меньшей сторон равна $8-5 = 3$.

2. **Ответ**. 45. **Решение**. Так как прямоугольник является частным случаем параллелограмма, то у него противоположные стороны равны, тогда $2 \cdot AB + 2 \cdot BC = 42$, что при $AB = \frac{2}{5}BC$ равносильно $\frac{4}{5}BC + 2 \cdot BC = 42$, откуда находим $BC = 15$, значит, $AB = 6$.

   Треугольники ABC и ADC равны по двум катетам, тогда их площади равны, следовательно, площадь треугольника ABC равна половине площади $ABCD$ и равна $0,5 \cdot 6 \cdot 15 = 45$.

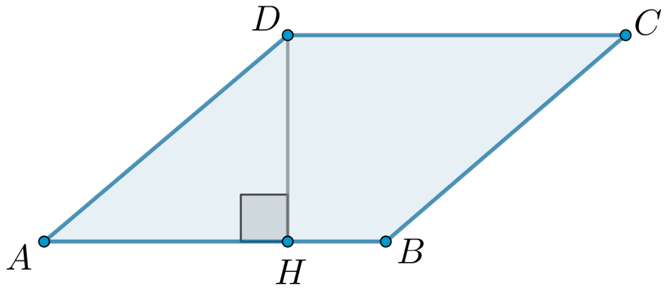
3. **Ответ**. 100. **Решение**. Пусть E – точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$.

   В квадрате диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, тогда $AE = ED \ \Rightarrow \triangle ADE$ — равнобедренный.

   Опустим из точки E высоту EF на AD (длина EF и есть расстояние от точки E до стороны). Так как $\triangle ADE$ — равнобедренный, то EF является и медианой, но в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы, тогда $EF = 0,5 \cdot AD$.

   Тогда $AD = 10$, следовательно, площадь квадрата $ABCD$ равна 100.

4. **Ответ**. 8. **Решение**. Проведем $DH \perp AB$. Так как $\angle A = 30°$,



а катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы, то $AD = 2DH = 2 \cdot 2 = 4$. Площадь ромба равна произведению высоты на сторону, к которой проведена высота, следовательно,

$$S = DH \cdot AB = 4 \cdot 2 = 8$$

($AB = AD$, так как в ромбе по определению все стороны равны)

5. **Ответ**. 24. **Решение**. Так как площадь ромба равна половине произведения диагоналей, то

$$S = 0,5 \cdot 4 \cdot 12 = 24$$

6. **Ответ**. 7,5. **Решение**. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту. Полусумма оснований трапеции $ABCD$ равна $0,5(5+2\cdot 5) = 7,5$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $7,5BE$, тогда $\dfrac{S_{ABCD}}{BE} = 7,5$.

7. **Ответ**. 20,8. **Решение**. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту. Так как $BC \parallel AD$, то в $BCFE$ все углы прямые, следовательно, $BCFE$ – прямоугольник и $EF = BC = 3$. Средняя линия в трапеции параллельна её основаниям, тогда $MK \parallel AE$. При этом, M – середина AB, значит, MK – средняя линия в треугольнике ABE. Средняя линия треугольника равна половине его основания, тогда $AE = 2 \cdot MK = 2$.

   $AD = AE + EF + FD = 2 + 3 + 2,4 = 7,4$. Треугольник BCF – прямоугольный. $BC = 3$, $BF = 5$, откуда по теореме Пифагора: $CF^2 = BF^2 - BC^2 = 25 - 9 = 16$, то есть, $CF = 4$.

Площадь $ABCD$ равна $0,5(3+7,4)\cdot 4 = 20,8$.

8. **Ответ**. 30. **Решение**. Пусть $AB = 10$, BE – перпендикуляр к AD, точка E лежит на AD.

   Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту, тогда $80 = 0,5(20+12)\cdot BE$.

   $BE = 5 = 0,5\cdot AB$. Треугольник ABE, – прямоугольный, причём $BE = 0,5\cdot AB$, тогда угол, лежащий против катета BE, равен $30°$.

   $\angle BAE = 30°$ – единственный острый угол трапеции $ABCD$, который образует AB с одним из оснований.

9. **Ответ**. 3. **Решение**. Пусть d – диагональ ромба, которую нужно найти. Так как площадь ромба равна половине произведения диагоналей, то

$$18 = S = 0,5\cdot d\cdot 12 \quad\Rightarrow\quad d = 3$$

10. **Ответ**. 2. **Решение**. Пусть меньшая диагональ равна d, тогда большая равна $3d$. Так как площадь ромба равна половине произведения диагоналей, то

$$6 = S = 0,5\cdot d\cdot 3d \quad\Rightarrow\quad d = 2$$

11. **Ответ**. 6. **Решение**. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, тогда площадь треугольника AED равна $0,5\cdot AD\cdot h$, где h – высота, опущенная из точки E на AD. Пусть эта высота пересекает AD в точке F, тогда $FECD$ – параллелограмм ($EF \parallel CD,\ EC \parallel FD$), значит, $h = CD$ и площадь прямоугольника $ABCD$ равна $AD\cdot h$, то есть она в два раза больше, чем площадь треугольника AED и, следовательно, равна 6.

12. **Ответ**. 50. **Решение**. $AD = CD$; по теореме Пифагора находим: $AC^2 = AD^2 + CD^2 = 2\cdot AD^2$, тогда $AD^2 = 50$, но площадь квадрата $ABCD$ и равна AD^2.

13. **Ответ**. 2. **Решение**. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, проведённую к этому основанию, тогда $35 = BE \cdot AD = 5 \cdot (5 + AE)$, откуда находим $AE = 2$.

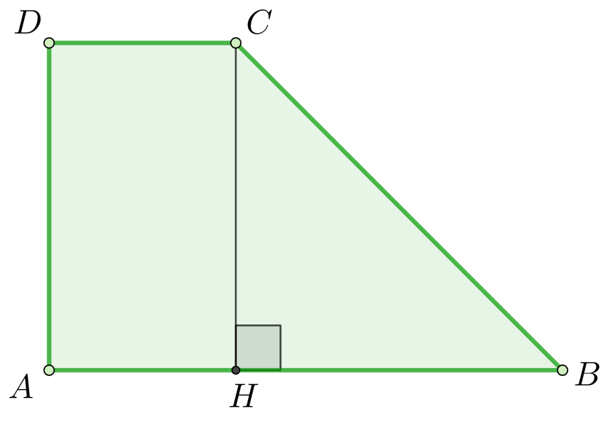
14. **Ответ**. 6. **Решение**. Площадь параллелограмма равна произведению высоты на сторону, к которой высота проведена. Следовательно, с одной стороны, площадь $S = 9 \cdot 10$, с другой стороны, $S = 15 \cdot h$, где h – высота, которую нужно найти.
Следовательно,

$$9 \cdot 10 = 15 \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad h = 6$$

15. **Ответ**. 8. **Решение**. Площадь параллелограмма равна произведению высоты на сторону, к которой высота проведена: $S = ah$. Тогда $h = S : a$. Следовательно, чем больше a, тем меньше h (при фиксированном S). Таким образом, большая высота равна

$$h = \frac{40}{5} = 8$$

16. **Ответ**. 16. **Решение**. Проведем высоту CH. Так как $\angle HBC =$

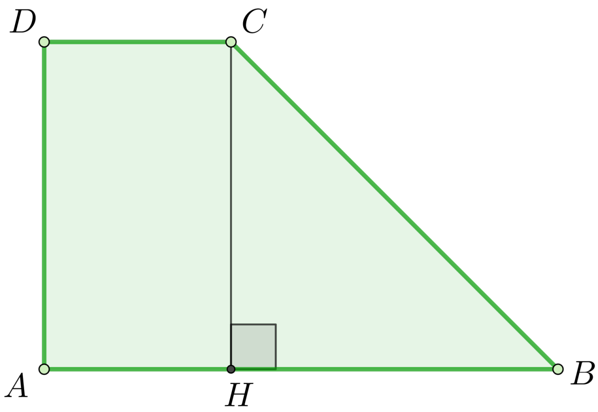


$45°$, то $\angle HCB = 45°$. Следовательно, $\triangle HBC$ равнобедренный и $HB = HC$.
$ADCH$ – прямоугольник, следовательно, $AH = DC = 2$. Тогда

$CH = HB = 6 - 2 = 4$. Тогда площадь трапеции равна

$$S = \frac{AB + DC}{2} \cdot CH = \frac{2+6}{2} \cdot 4 = 16$$

17. **Ответ**. 45. **Решение**. Проведем высоту CH. $ADCH$ – прямо-

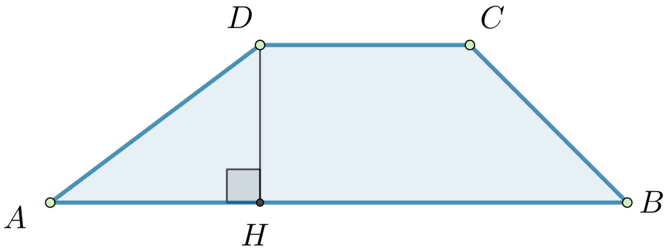


угольник, следовательно, $AH = DC = 4$. Тогда $HB = 12 - 4 = 8$. Площадь трапеции равна

$$64 = \frac{AB + DC}{2} \cdot CH = \frac{4+12}{2} \cdot CH \quad \Rightarrow \quad CH = 8$$

Заметим, что мы получили, что $CH = HB = 8$. То есть $\triangle CHB$ равнобедренный, значит, углы при основании равны, то есть $\angle HCB = \angle HBC$. Так как сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна $90°$, то $\angle B = \angle HBC = 90° : 2 = 45°$.

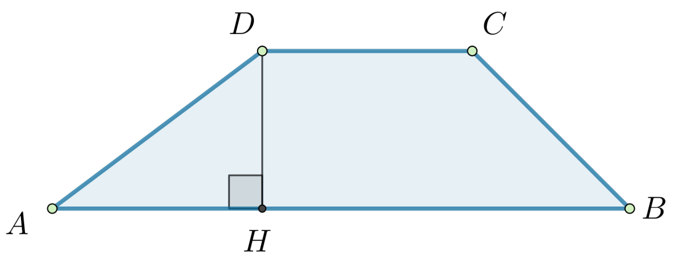
18. **Ответ**. 42. **Решение**. Пусть $AD = 7$, тогда $\angle ADC = 150°$. По свойству трапеции $\angle DAB = 180° - 150° = 30°$. Проведем $DH \perp AB$. Рассмотрим $\triangle ADH$. Катет, лежащий против угла $30°$, равен



половине гипотенузы, следовательно, $DH = AD : 2 = 3,5$. Тогда площадь трапеции равна

$$S = \frac{AB + DC}{2} \cdot DH = \frac{18 + 6}{2} \cdot 3,5 = 42$$

19. **Ответ**. 30. **Решение**. Пусть $AD = 8$. Проведем $DH \perp AB$. Тогда

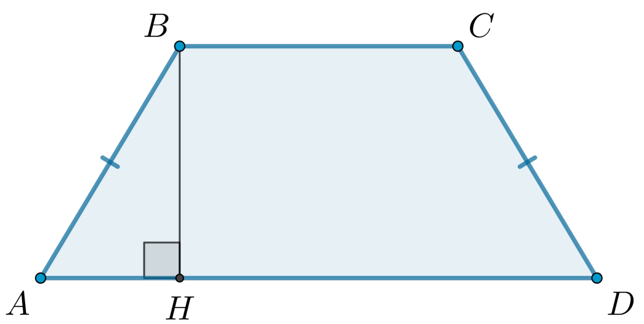


площадь трапеции равна

$$72 = \frac{AB + DC}{2} \cdot DH = \frac{27 + 9}{2} \cdot DH \quad \Rightarrow \quad DH = 4$$

Рассмотрим прямоугольный $\triangle ADH$. Так как катет DH равен половине гипотенузы AD, то угол DAH равен 30°.

20. **Ответ**. 160. **Решение**. Проведем высоту BH. По свойству равнобедренной трапеции $AH = (AD - BC) : 2 = (26 - 14) : 2 = 6$. Тогда из прямоугольного треугольника ABH:

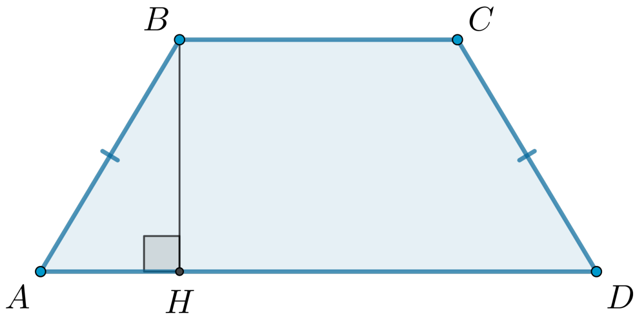


$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

Тогда площадь трапеции:

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{26 + 14}{2} \cdot 8 = 160$$

21. **Ответ**. 5. **Решение**. Проведем высоту BH. Площадь трапеции



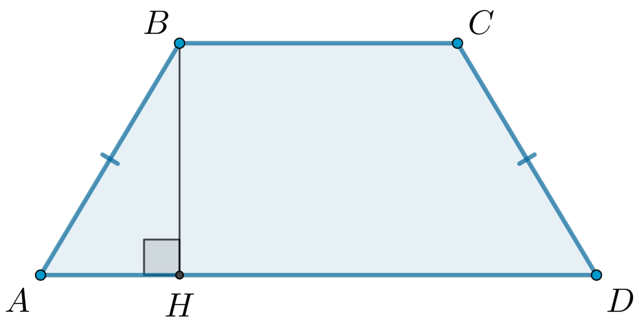
равна

$$40 = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{7 + 13}{2} \cdot BH \quad \Rightarrow \quad BH = 4$$

Рассмотрим прямоугольный $\triangle ABH$. По свойству равнобедренной трапеции $AH = (AD - BC) : 2 = (13 - 7) : 2 = 3$. Следовательно,

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = 5$$

22. **Ответ**. 160. **Решение**. Проведем высоту BH. По свойству равнобедренной трапеции $AH = (AD - BC) : 2 = (26 - 14) : 2 = 6$. Так как периметр трапеции равен 60, а боковые стороны равны,



то

$$AB = \frac{60 - 14 - 26}{2} = 10$$

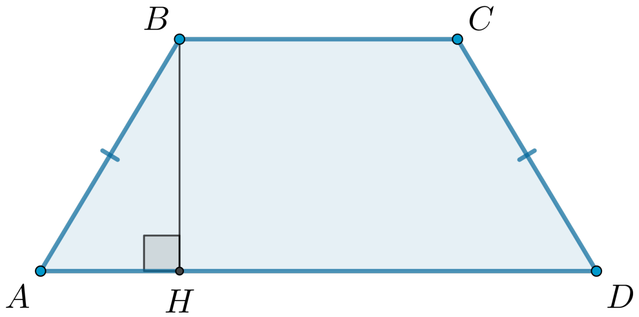
Тогда из прямоугольного треугольника ABH:

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

Тогда площадь трапеции:

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{26 + 14}{2} \cdot 8 = 160$$

23. **Ответ**. 30. **Решение**. Проведем высоту BH. Площадь трапеции



равна

$$40 = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{7 + 13}{2} \cdot BH \quad \Rightarrow \quad BH = 4$$

Рассмотрим прямоугольный $\triangle ABH$. По свойству равнобедренной трапеции $AH = (AD - BC) : 2 = (13 - 7) : 2 = 3$. Следовательно,

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = 5$$

Тогда периметр трапеции равен $5 + 5 + 7 + 13 = 30$.

Урок 14. Дополнительные формулы площадей четырехугольников и треугольников

Теорема: формула Герона для площади треугольника

Пусть p – полупериметр треугольника, a, b, c – длины его сторон, тогда его площадь равна

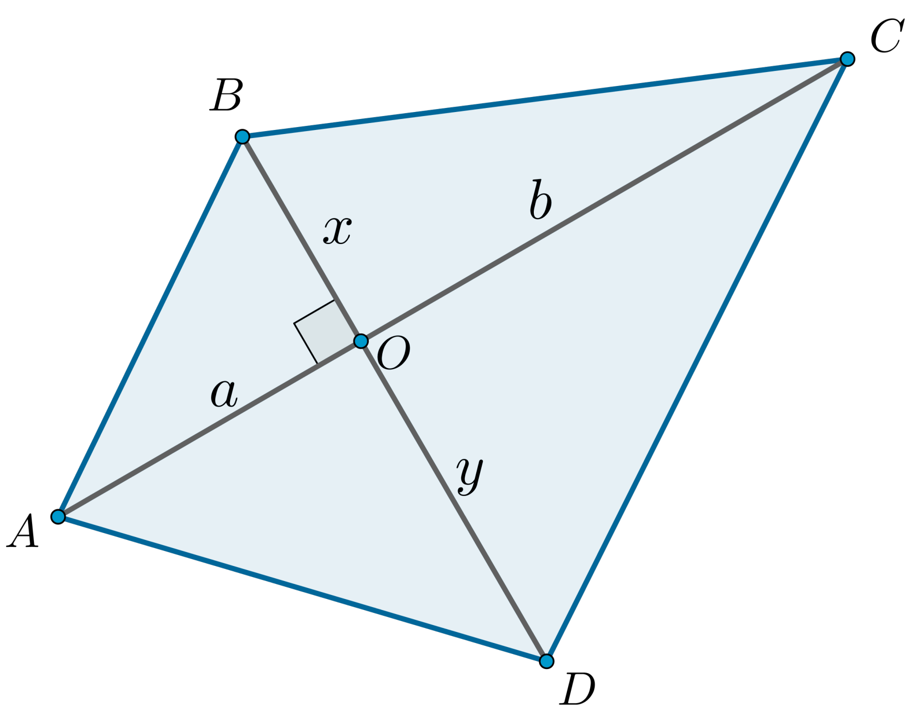
$$S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Теорема: площадь четырехугольника

Если в четырехугольнике $ABCD$ диагонали взаимно перпендикулярны, то суммы квадратов противоположных сторон равны:

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$$

Доказательство



По теореме Пифагора:

$$AB^2 = x^2 + a^2$$
$$CD^2 = b^2 + y^2$$
$$BC^2 = x^2 + b^2$$
$$AD^2 = a^2 + y^2$$

Из равенств видно, что $AB^2 + CD^2 = x^2 + a^2 + y^2 + b^2 = BC^2 + AD^2$

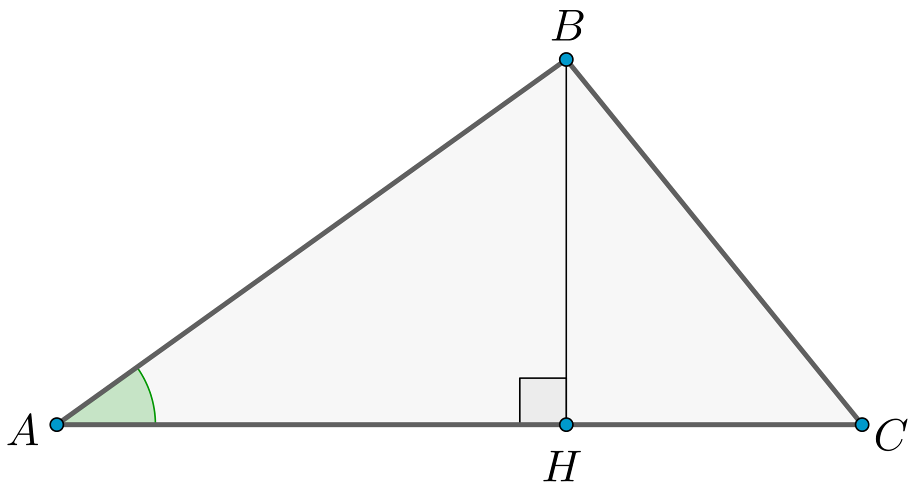
Площади многоугольников через тригонометрию

Теорема: площадь треугольника

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC и проведем в нем высоту BH.



Тогда $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} BH \cdot AC \qquad (*)$.

Из прямоугольного треугольника ABH: $\sin\angle A = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \cdot \sin\angle A$. Подставим данное выражение в формулу $(*)$:

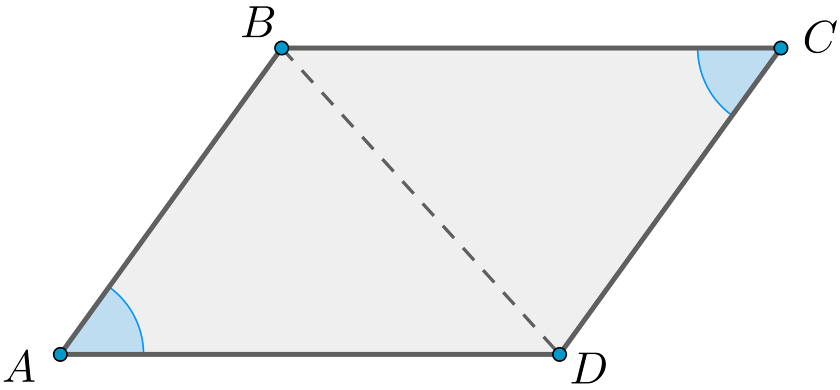
$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\angle A$, чтд.

Теорема: площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению его смежных сторон на синус угла между ними.

Доказательство

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ и проведем диагональ BD. Треугольники ABD и CBD равны по трем сторонам.



Следовательно, $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \dfrac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \angle A = AB \cdot AD \cdot \sin \angle A$, чтд.

Теорема

Площадь произвольного выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

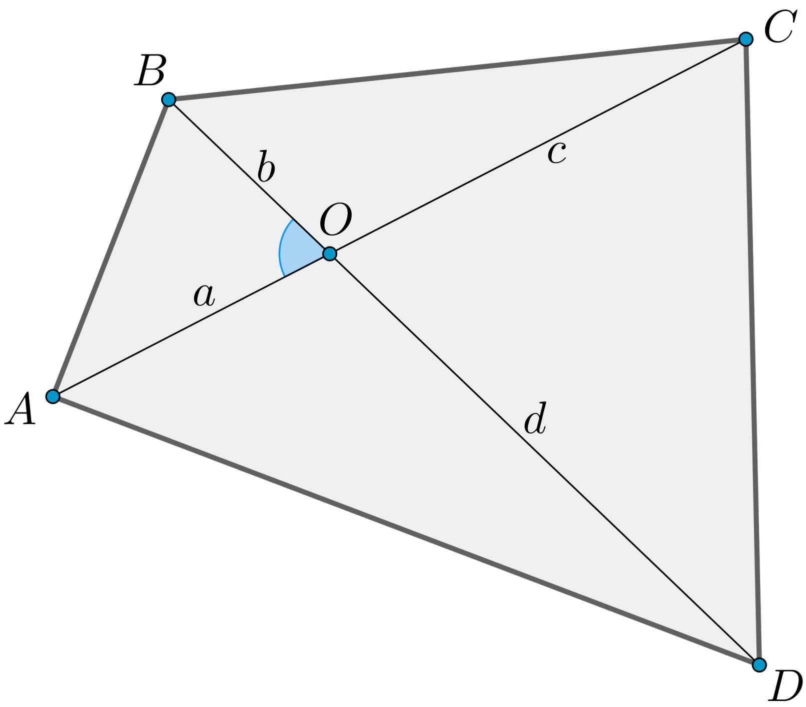
Доказательство

Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$. Обозначим $AO = a, BO = b, CO = c, DO = d$.

Заметим, что $\angle AOB$ и $\angle BOC$ — смежные, следовательно, $\sin \angle AOB = \sin \angle BOC$.

Заметим также, что $\angle AOB$ и $\angle COD$, $\angle BOC$ и $\angle DOA$ – пары вертикальных углов, следовательно, они равны, следовательно, и их синусы равны.

Таким образом, обозначим $\sin \angle AOB = \sin \angle BOC = \sin \angle COD = \sin \angle DOA = \sin \angle O$.



$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} =$$

$$= \frac{1}{2}ab \cdot \sin \angle O + \frac{1}{2}bc \cdot \sin \angle O + \frac{1}{2}cd \cdot \sin \angle O + \frac{1}{2}da \cdot \sin \angle O =$$

$$= \frac{1}{2} \sin \angle O(ab + bc + cd + da) =$$

$$= \frac{1}{2} \sin \angle O(b(a + c) + d(a + c)) =$$

$$= \frac{1}{2} \sin \angle O(a + c)(b + d) =$$

$$= \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin \angle O$$

Задачи для аудиторной работы

---

1. В треугольнике ABC: $AC = 4$, $AB = 6$, $\cos\angle BAC = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите площадь треугольника ABC.

2. В треугольнике ABC: AD – высота, $\cos\angle DAC = 0,7$, $AC = 6$, $BC = 9$. Найдите площадь треугольника ABC.

3. Периметр треугольника ABC равен 250, одна из его сторон равна 120, ещё одна сторона равна 17. Найдите его площадь.

4. Сторона AB треугольника ABC равна 2, его периметр $P = 9$, а его площадь равна $\dfrac{\sqrt{135}}{4}$, причём $AC \cdot BC = 12$. Найдите $BC + AC$.

5. Сторона AB треугольника ABC равна $\sqrt{3}$, его периметр $P = \dfrac{10}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}$, а его площадь равна $0,5\sqrt{5}$, причём $AC \cdot BC = \sqrt{6}$. Найдите $(BC + AC) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

6. В параллелограмме $ABCD$: $AB = 6$, $BC = 5$, $\sin\angle A + \sin\angle B + \sin\angle C + \sin\angle D = 3,24$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

7. В ромбе $ABCD$: O – точка пересечения диагоналей, $BD = 8$, $\operatorname{tg}\angle BDC = 3$. Найдите площадь ромба $ABCD$.

8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O, $\angle COD = \arcsin 0,85$, $AC = 5$, $BD = 4$. Найдите площадь $ABCD$.

Задачи для домашней работы

---

9. Найдите площадь треугольника со сторонами 6, 5 и $\sqrt{13}$.

10. Найдите площадь треугольника со сторонами 22, $\sqrt{197}$ и $\sqrt{65}$.

11. Найдите квадрат площади треугольника со сторонами 7, 11 и $6\sqrt{6}$.

12. Найдите высоту треугольника, проведенную к стороне длиной 8, если высота, проведенная к стороне длиной 6, равна 4.

13. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна $\sqrt[4]{3}$, а один из углов равен 30°. Найдите площадь этого треугольника.

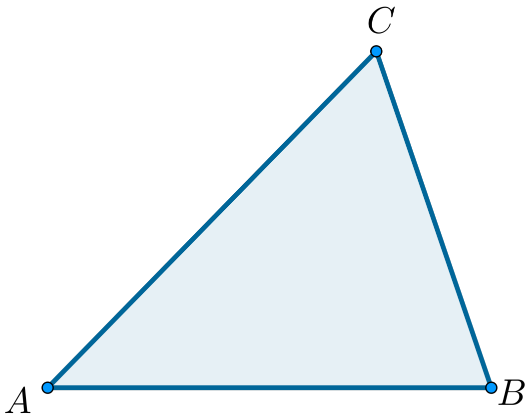
14. Катеты прямоугольного треугольника относятся как $5:4$, а площадь равна $4,1$. Найдите гипотенузу этого треугольника.

15. Дан треугольник ABC. На сторонах AB и BC отмечены точки A' и C' соответственно. Известно, что $BC' = 0,5BC = 4$, $AB = 14$, $S_{ABC} = 7S_{A'BC'}$. Найдите $A'B$.

16. В трапеции боковые стороны равны 12 и $12\sqrt{5}$, угол при меньшей боковой стороне равен 135°. Найдите отношение меньшего основания к большему, если площадь трапеции равна 156.
Если задача допускает несколько вариантов ответа, внесите в бланк меньший из них.

17. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 50. Найдите площадь выпуклого четырехугольника $A'B'C'D'$, вершины которого – середины сторон параллелограмма $ABCD$.

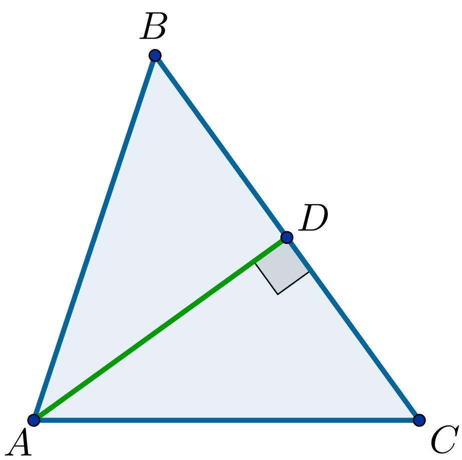
1. **Ответ**. 3. **Решение**.



Из основного тригонометрического тождества:
$\sin^2 \angle BAC = 1 - \frac{15}{16}$, тогда $\sin \angle BAC = \pm 0,25$. Так как $\angle BAC \in (0°; 180°)$, то $\sin \angle BAC = 0,25$.

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними,
тогда площадь треугольника ABC равна $0,5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 0,25 = 3$.

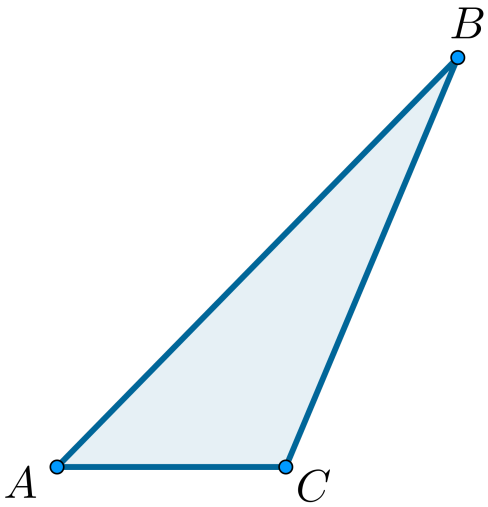
2. **Ответ**. 18,9. **Решение**.



Так как AD перпендикулярна DC, то $\sin \angle C = \cos \angle DAC = 0,7$.

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними, тогда площадь треугольника ABC равна $0,5 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 0,7 = 18,9$.

3. **Ответ**. 900. **Решение**.



Третья сторона треугольника равна $250 - 120 - 17 = 113$.
По формуле Герона $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$, где p – полупериметр треугольника ABC.

Для данного треугольника

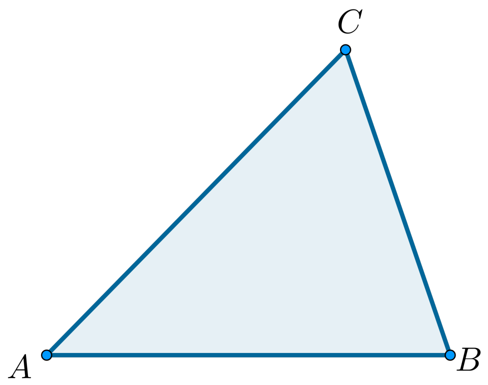
$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{125 \cdot (125-120) \cdot (125-17) \cdot (125-113)} =$$

$$= \sqrt{125 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 108} =$$

$$= 25\sqrt{12 \cdot 108} = 100\sqrt{3 \cdot 27} = 900.$$

4. **Ответ**. 7. **Решение**.
По формуле Герона $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$, где p – полупериметр треугольника ABC, $p = 4,5$,

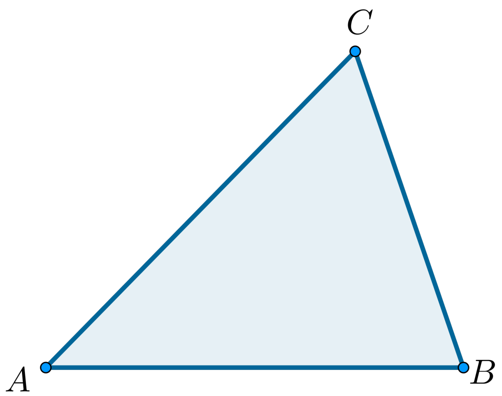
тогда $S^2_{\triangle ABC} = p(p-AB)(p-BC)(p-AC)$, тогда $\dfrac{S^2_{\triangle ABC}}{p(p-AB)} =$ $(p-BC)(p-AC) = p^2 - p(AC+BC) + AC \cdot BC$, откуда



$$\frac{\frac{135}{16}}{4,5\cdot 2,5} = \frac{81}{4} - \frac{9}{2}(AC+BC) + 12 \quad \Rightarrow \quad \frac{135}{16}\cdot\frac{4}{45} = \frac{81}{4} - \frac{9}{2}(AC+BC) + 12 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{39}{2} = \frac{9}{2}(AC+BC) - 12 \quad \Rightarrow \quad AC+BC = 7.$$

5. **Ответ**. 1. **Решение**.



$$P = \frac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

По формуле Герона $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$, где p – полупериметр треугольника ABC, $p = \sqrt{3} + 0,5\sqrt{2}$, тогда

$$S^2_{\triangle ABC} = p(p-AB)(p-BC)(p-AC) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{S^2_{\triangle ABC}}{p(p-AB)} = (p-BC)(p-AC) = p^2 - p(AC+BC) + AC \cdot BC,$$

откуда

$$\frac{1,25}{(\sqrt{3}+0,5\sqrt{2})\cdot 0,5\sqrt{2}} = 3,5+\sqrt{6}-(\sqrt{3}+0,5\sqrt{2})(AC+BC)+\sqrt{6}$$

Значит:

$$AC+BC = \frac{3,5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+0,5\sqrt{2}} - \frac{2,5}{(\sqrt{3}+0,5\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{2}} =$$

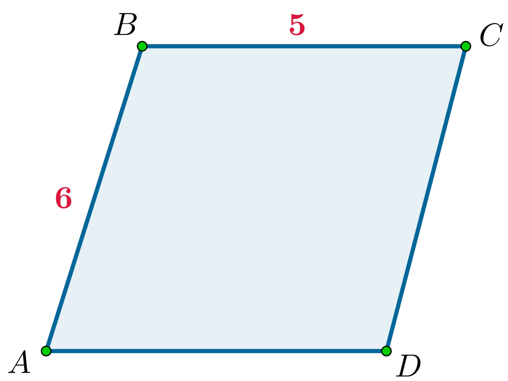
$$= \frac{(3,5+2\sqrt{6})(\sqrt{3}+0,5\sqrt{2})\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+0,5\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{2}} - \frac{2,5}{(\sqrt{3}+0,5\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(3,5+2\sqrt{6})(\sqrt{3}+0,5\sqrt{2})\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+0,5\sqrt{2})^2\sqrt{2}} - \frac{2,5}{(\sqrt{3}+0,5\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{2}} = \frac{5,5\sqrt{6}+13}{3,5\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

Тогда

$$(AC+BC)\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \frac{(5,5\sqrt{6}+13)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3,5\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{3,5\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3,5\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = 1$$

6. **Ответ**. 24,3. **Решение**.



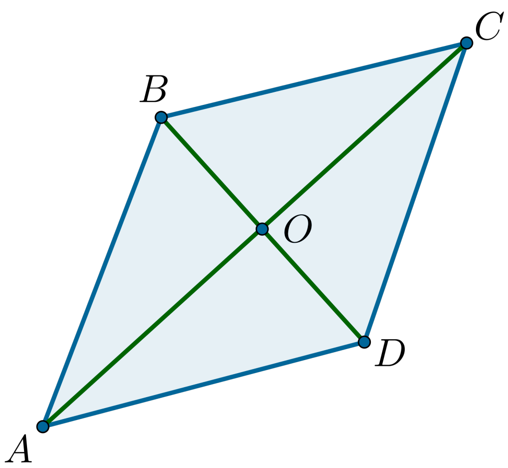
В параллелограмме противоположные углы равны, а односторонние углы в сумме составляют 180°.

Так как $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, то $\sin\angle A + \sin\angle B + \sin\angle C + \sin\angle D = 4\sin\angle A$, откуда находим $\sin\angle A = 0,81$.

Площадь параллелограмма равна произведению двух его непараллельных сторон на синус угла между ними, тогда

$$S_{ABCD} = 6 \cdot 5 \cdot 0,81 = 24,3.$$

7. **Ответ**. 96. **Решение**.



В ромбе диагонали пересекаются под прямым углом и точкой пересечения делятся пополам, тогда $OD = 4$, $\dfrac{CO}{OD} = \operatorname{tg}\angle BDC = 3$, откуда $CO = 12$, следовательно, $AC = 24$.

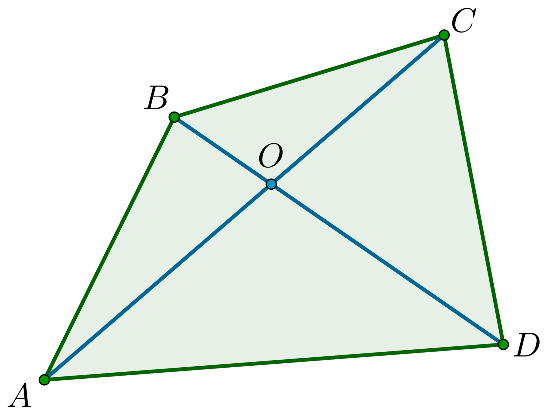
Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей, тогда

$$S_{ABCD} = 0,5 \cdot 8 \cdot 24 = 96.$$

8. **Ответ**. 8,5. **Решение**.

Площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними, тогда $\sin\angle COD = \sin(\arcsin 0,85) = 0,85$, тогда

$$S_{ABCD} = 0,5 \cdot 0,85 \cdot 5 \cdot 4 = 8,5.$$



9. **Ответ**. 9. **Решение**. Применим формулу Герона для поиска площади треугольника:

$$S=\sqrt{\frac{6+5+\sqrt{13}}{2}\cdot\left(\frac{6+5+\sqrt{13}}{2}-\sqrt{13}\right)\cdot\left(\frac{6+5+\sqrt{13}}{2}-5\right)\cdot\left(\frac{6+5+\sqrt{13}}{2}-6\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{6+5+\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{6+5-\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{6+\sqrt{13}-5}{2}\cdot\frac{5+\sqrt{13}-6}{2}}=$$

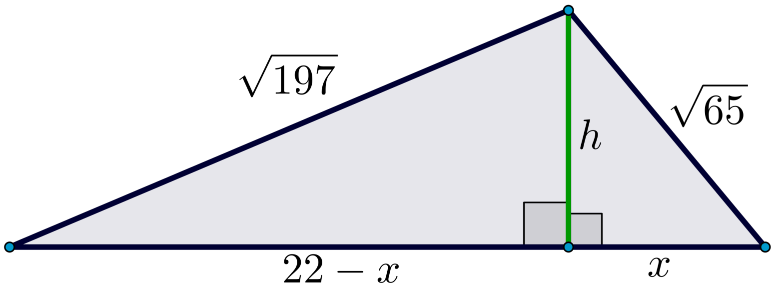
$$=\sqrt{\frac{11+\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{11-\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}-1}{2}}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\left(11^2-(\sqrt{13})^2\right)\cdot\left((\sqrt{13})^2-1^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{(121-13)(13-1)}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{(4\cdot3\cdot9)\cdot(4\cdot3)}=\frac{1}{4}\cdot2\cdot3\cdot3\cdot2=9.$$

10. **Ответ**. 11. **Решение**. Рассмотрим этот треугольник. Проведем высоту к стороне, равной 22:

Обозначим эту высоту за h, а отрезки, на которые она разбила сторону, за x и $22-x$. Запишем теорему Пифагора для двух получившихся прямоугольных треугольников:

$$\begin{cases}197=h^2+(22-x)^2\\65=h^2+x^2\end{cases}\Leftrightarrow\quad\begin{cases}197-65=(22-x)^2-x^2\\65=h^2+x^2\end{cases}\Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 132 = (22-x-x)(22-x+x) \\ 65 = h^2 + x^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 8 \\ h = 1 \end{cases}$$

Таким образом, площадь этого треугольника равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 22 = 11$$

11. **Ответ**. 1350. **Решение**.

По формуле Герона квадрат площади треугольника равен

$$S^2 = \frac{7+11+6\sqrt{6}}{2} \cdot \left(\frac{7+11+6\sqrt{6}}{2} - 6\sqrt{6}\right) \cdot \left(\frac{7+11+6\sqrt{6}}{2} - 7\right) \cdot \left(\frac{7+11+6\sqrt{6}}{2} - 11\right) =$$

$$= \frac{7+11+6\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{7+11-6\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{11+6\sqrt{6}-7}{2} \cdot \frac{7+6\sqrt{6}-11}{2} =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot (18+6\sqrt{6})(18-6\sqrt{6})(6\sqrt{6}+4)(6\sqrt{6}-4) =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot 6^2 \cdot (3 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6}) \cdot ((6\sqrt{6})^2 - 4^2) = \frac{6^2 \cdot 3 \cdot 200}{16} = 1350.$$

12. **Ответ**. 3. **Решение**. Т.к. площадь треугольника равна полупроизведению высоты и стороны, к которой эта высота проведена, то с одной стороны площадь равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4,$$

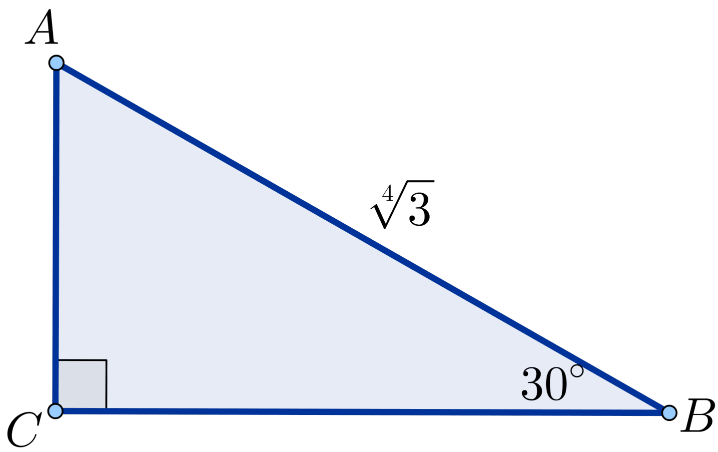
а с другой

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot h,$$

где h – высота, которую нужно найти. Таким образом, получаем следующее равенство:

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad h = 3.$$

13. **Ответ**. 0,375. **Решение**.



Т.к. катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы, то $AC = 0,5 \cdot AB = 0,5 \cdot \sqrt[4]{3}$.

Т.к. $\angle A = 90^\circ - \angle B = 60^\circ$, то площадь равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{8} = 0,375.$$

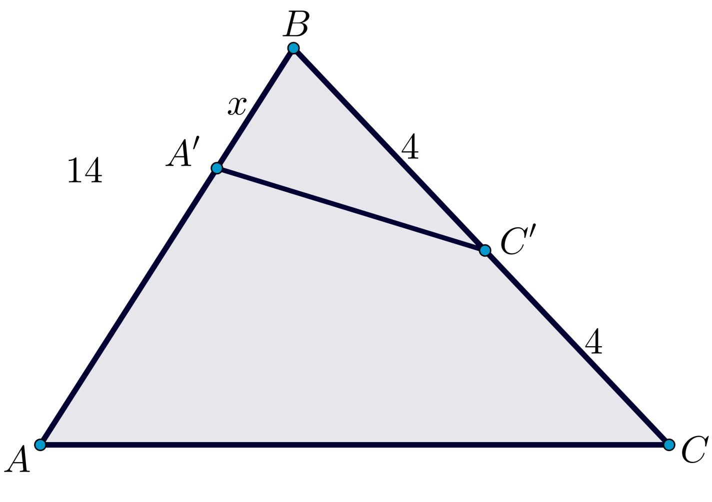
14. **Ответ**. 4,1. **Решение**. Т.к. катеты относятся как $5 : 4$, то их можно обозначить за $4x$ и $5x$. Тогда необходимо найти гипотенузу, по теореме Пифагора равную $\sqrt{25x^2 + 16x^2} = \sqrt{41x^2}$.

Т.к. площадь прямоугольного треугольника равна полупроизведению катетов, то $S = 0,5 \cdot 5x \cdot 4x = 10x^2 = 4,1$. Следовательно, $x^2 = 0,41$.

Значит, гипотенуза равна

$$\sqrt{41 \cdot 0,41} = \sqrt{41 \cdot 41 \cdot 0,01} = 41 \cdot 0,1 = 4,1.$$

15. **Ответ**. 4. **Решение**.



Площадь треугольника ABC равна $S_{ABC} = 0,5 \cdot 14 \cdot 8 \cdot \sin \angle B$.

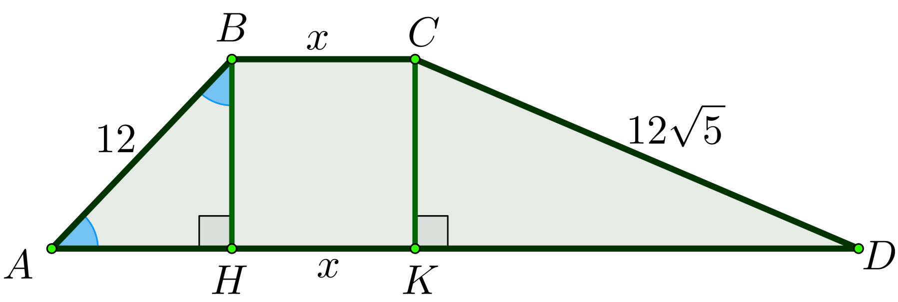
Площадь треугольника $A'BC'$ равна $S_{A'BC'} = 0,5 \cdot A'B \cdot 4 \cdot \sin \angle B$.

Таким образом, имеем равенство:

$$0,5\cdot 14\cdot 8\cdot \sin\angle B = 7\cdot 0,5\cdot A'B\cdot 4\cdot \sin\angle B \quad \Leftrightarrow \quad A'B = 4.$$

16. **Ответ**. 0,04. **Решение**. Рассмотрим трапецию $ABCD$, где $AB = 12, CD = 12\sqrt{5}$, $\angle A = 45°, \angle B = 135°$, и проведем в ней высоты BH и CK. При этом трапеция может выглядеть двумя разными способами.

1 способ.



Заметим, что $\triangle ABH$ – прямоугольный и равнобедренный, тогда

$$BH = AH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

Значит, из прямоугольного $\triangle DCK$ можно найти KD:

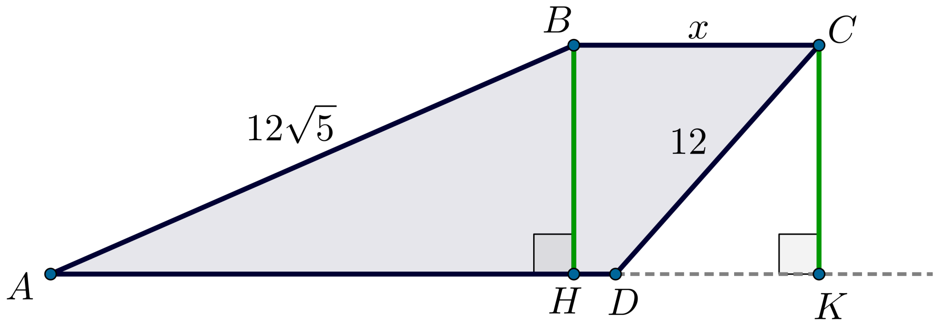
$$KD^2 = CD^2 - CK^2 = (12\sqrt{5})^2 - (6\sqrt{2})^2 = 648 \quad \Rightarrow \quad KD = \sqrt{9\cdot 9\cdot 4\cdot 2}$$

Т.к. площадь трапеции равна 156, то имеем следующее уравнение:

$$\frac{6\sqrt{2} + 18\sqrt{2} + x + x}{2}\cdot 6\sqrt{2} = 156 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2}$$

Тогда $BC : AD = (\sqrt{2}) : (25\sqrt{2}) = 1 : 25$.

2 способ.



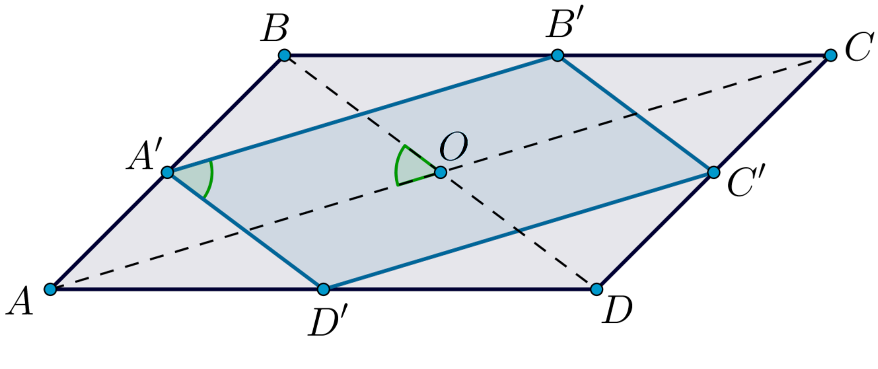
В этом случае, поступая аналогично первому способу, находим $CK = DK = BH = 6\sqrt{2}$, $AH = 18\sqrt{2}$, $AD = 18\sqrt{2} + x - 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2} + x$.

Из уравнения $156 = \dfrac{12\sqrt{2} + x + x}{2} \cdot 6\sqrt{2}$ находим $x = 7\sqrt{2}$.

Значит, $BC : AD = (7\sqrt{2}) : (19\sqrt{2}) = 7 : 19$.

Т.к. $\frac{1}{25} < \frac{7}{19}$, то в ответ пойдет $\frac{1}{25} = 0,04$.

17. **Ответ**. 25. **Решение**. Рассмотрим рисунок. Проведем диагонали



AC и BD. Так как A', B' – середины AB и BC, то $A'B'$ – средняя линия $\triangle ABC$. Следовательно, $A'B' = 0,5AC$. Аналогично $C'D' = 0,5AC$, $A'D' = B'C' = 0,5BD$. Следовательно, $A'B'C'D'$ – параллелограмм по признаку.

Так как площадь параллелограмма равна полупроизведению диагоналей на синус угла между ними, то

$$S_{ABCD} = 0,5 \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\angle AOB$$

Так как площадь параллелограмма также можно искать как произведение смежных сторон на синус угла между ними, то

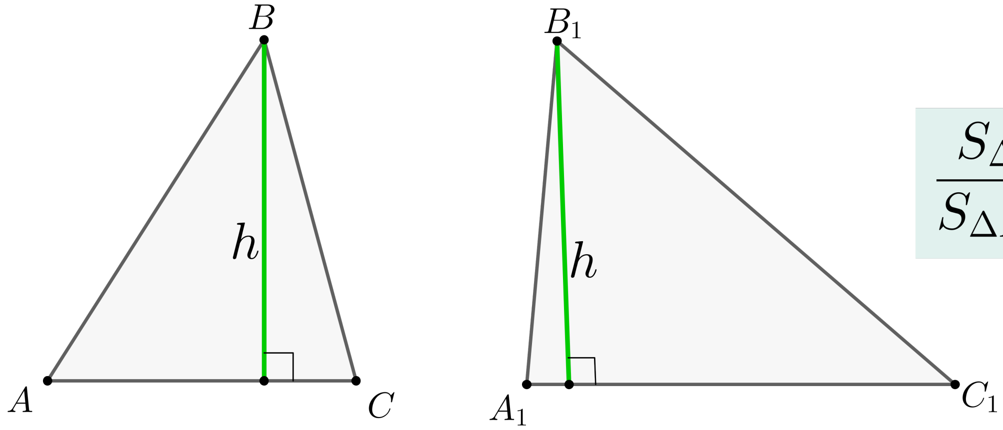
$$S_{A'B'C'D'} = A'D' \cdot A'B' \cdot \sin \angle B'A'D'$$

Заметим, что $\angle AOB = \angle B'A'D'$ как углы с попарно параллельными сторонами. Следовательно,

$$S_{A'B'C'D'} = 0,5BD \cdot 0,5AC \cdot \sin \angle AOB = 0,5S_{ABCD} = 0,5 \cdot 50 = 25$$

Теорема

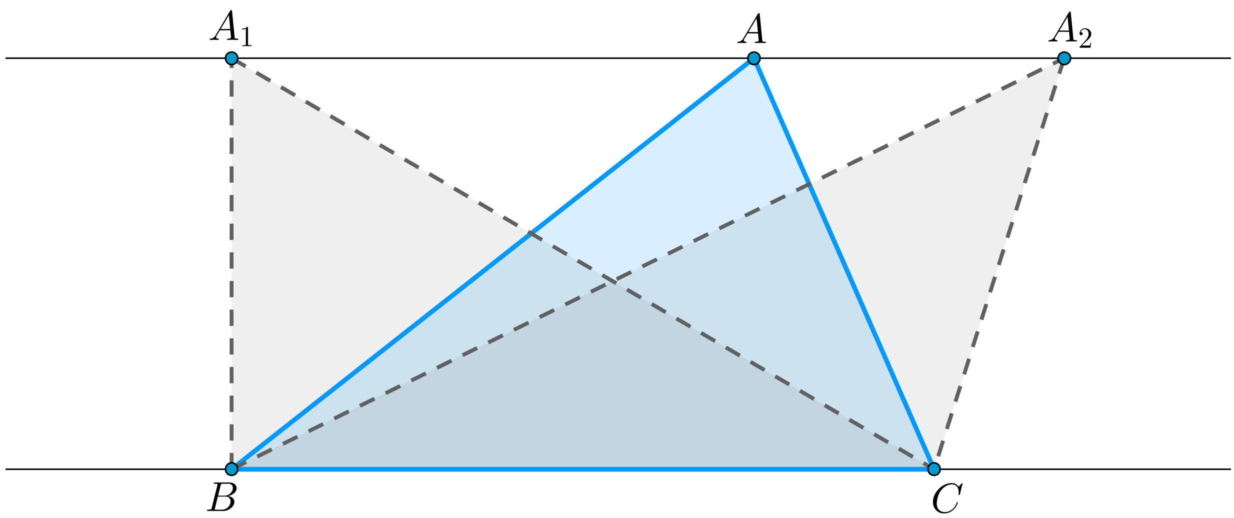
Если два треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ имеют равные высоты, то их площади относятся как основания, к которым эти высоты проведены.



$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

Следствие

Если вершину треугольника перемещать по прямой, параллельной противолежащей стороне, то площадь при этом останется прежней.



$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A_1BC} = S_{\triangle A_2BC}$$

Следствие

Медиана треугольника делит его на два треугольника, равных по площади (равновеликих).

Доказательство

Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, проведенную к этому основанию: $S_{ABC} = 0,5 \cdot AC \cdot h$.

Пусть BD – медиана в треугольнике ABC, тогда $AD = DC$.

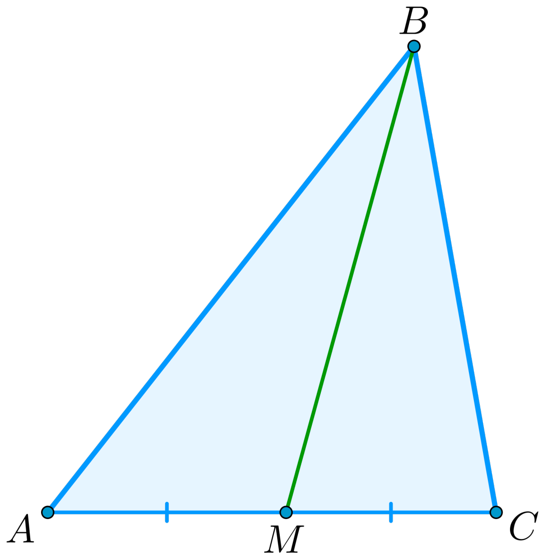
$S_{ABD} = 0,5 \cdot AD \cdot h$,
$S_{BCD} = 0,5 \cdot DC \cdot h$.

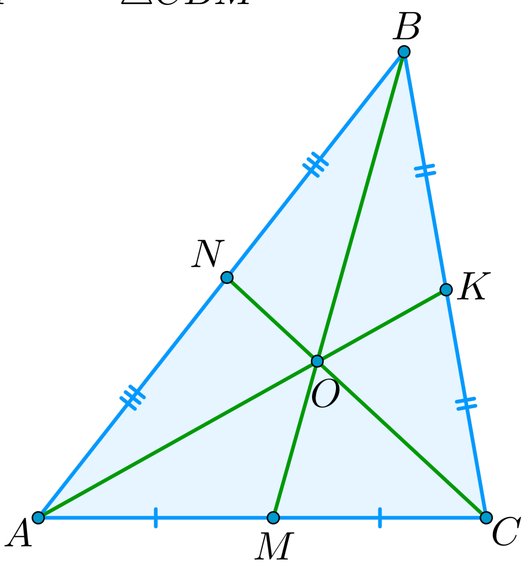
Так как $AD = DC$, то $S_{ABD} = S_{BCD}$, что и требовалось доказать.

Следствие

Все три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.

$$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}$$

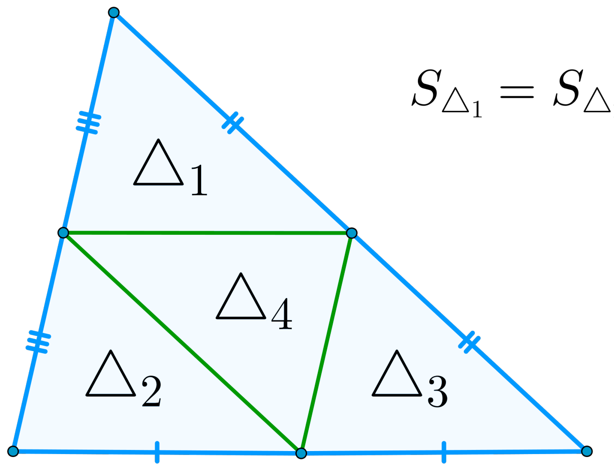




$$S_{\triangle AOM} = S_{\triangle COM} = S_{\triangle COK} = S_{\triangle BOK} = S_{\triangle BON} = S_{\triangle AON}$$

Теорема

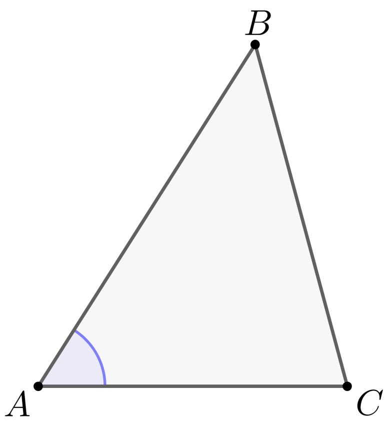
Все три средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника, и, как следствие, равных по площади.



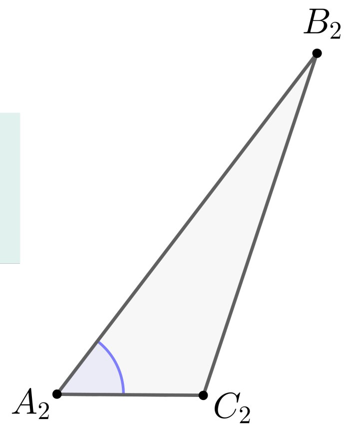
$$S_{\triangle_1} = S_{\triangle_2} = S_{\triangle_3} = S_{\triangle_4}$$

Теорема

Если два треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$ имеют по равному углу, то их площади относятся как произведения сторон, образующих этот угол.



$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_2B_2C_2}} = \frac{AB \cdot AC}{A_2B_2 \cdot A_2C_2}$$

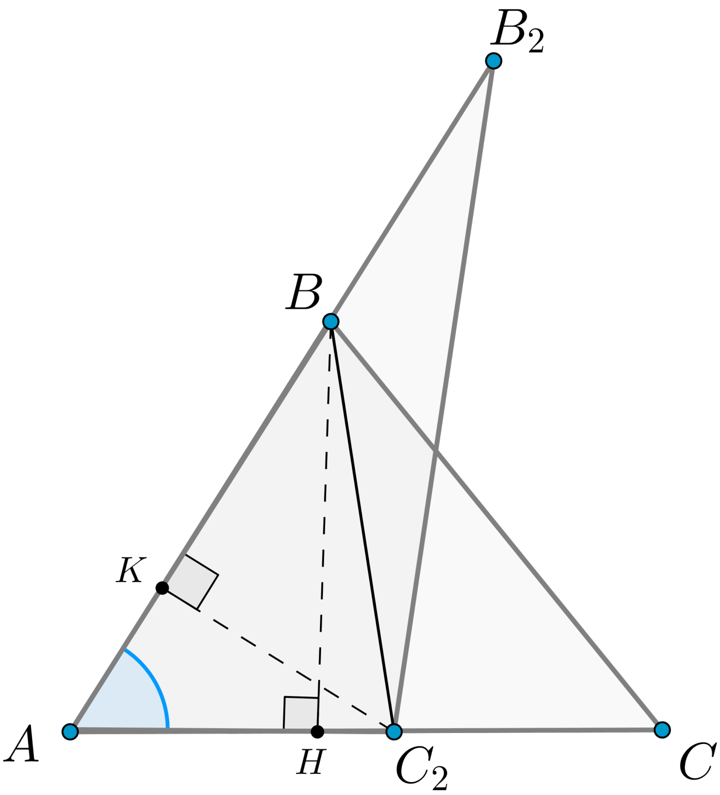


Доказательство

Пусть $\angle A = \angle A_2$. Совместим эти углы так, как показано на рисунке (точка A совместилась с точкой A_2):

Проведем высоты BH и C_2K.

Треугольники AB_2C_2 и ABC_2 имеют одинаковую высоту C_2K, сле-



довательно:

$$\frac{S_{AB_2C_2}}{S_{ABC_2}} = \frac{AB_2}{AB}$$

Треугольники ABC_2 и ABC имеют одинаковую высоту BH, следовательно:

$$\frac{S_{ABC_2}}{S_{ABC}} = \frac{AC_2}{AC}$$

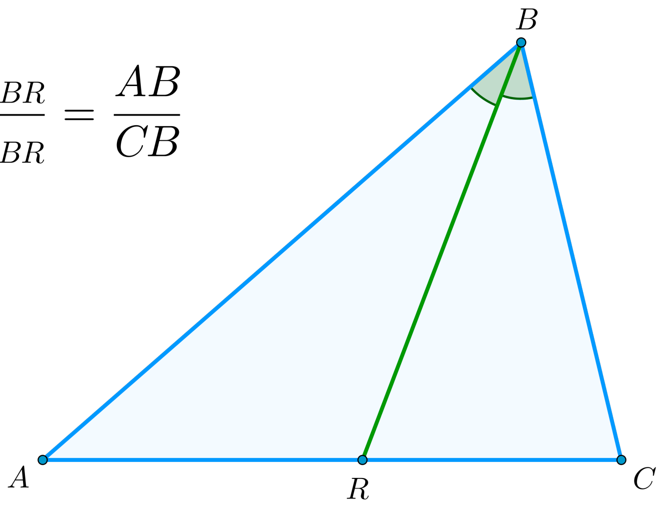
Перемножая последние два равенства, получим:

$$\frac{S_{AB_2C_2}}{S_{ABC}} = \frac{AB_2 \cdot AC_2}{AB \cdot AC} \qquad \text{или} \qquad \frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{ABC}} = \frac{A_2B_2 \cdot A_2C_2}{AB \cdot AC}$$

Следствие

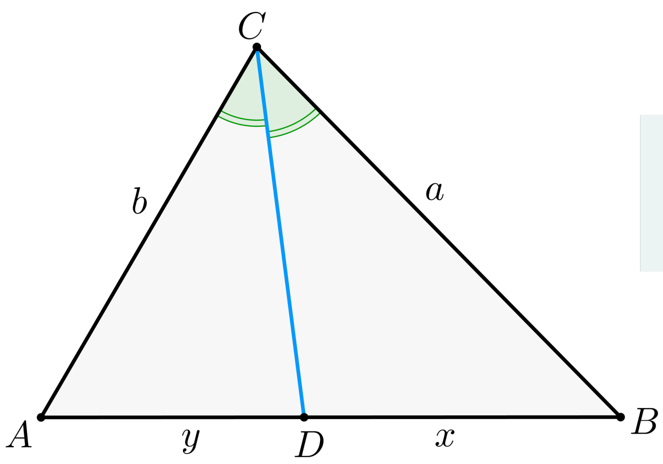
Биссектриса угла треугольника делит его на два треугольника, площади которых относятся как стороны, образующие этот угол

$$\frac{S_{\triangle ABR}}{S_{\triangle CBR}} = \frac{AB}{CB}$$



Из данных теорем, связанных с отношением площадей треугольников, следует один замечательный факт о биссектрисе угла треугольника.

Теорема



$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

Биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

Верно и обратное: если отрезок, проведенный из вершины треугольника к стороне, делит эту сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, то это биссектриса.

Доказательство

Площади треугольников, у которых есть равные углы, относятся как произведения сторон, образующих эти углы, то есть

$$\frac{S_{ACD}}{S_{BCD}} = \frac{AC \cdot CD}{CB \cdot CD} = \frac{AC}{CB}$$

С другой стороны, $\dfrac{S_{ACD}}{S_{BCD}} = \dfrac{0,5 \cdot AD \cdot h}{0,5 \cdot DB \cdot h}$, где h – высота, проведённая из точки C, тогда $\dfrac{S_{ACD}}{S_{BCD}} = \dfrac{AD}{DB}$.

В итоге $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{S_{ACD}}{S_{BCD}} = \dfrac{AC}{CB}$, откуда $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DB}{BC}$, что и требовалось доказать.

Задачи для аудиторной работы

---

1. Точки M, N, P лежат на сторонах AB, BC, CA соответственно треугольника ABC, причем $AM : AB = BN : BC = CP : CA = 1 : 3$. Площадь треугольника MNP равна 15. Найдите площадь треугольника ABC.

2. Внутри равностороннего треугольника со стороной m движется точка. Докажите, что сумма расстояний от этой точки до сторон треугольника не меняется, и найдите эту сумму.

3. Точки M, N, P лежат на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC, причем $AM : AB = BN : BC = CP : CA = 1 : 3$. При пересечении отрезков AN, BP, CM образуется треугольник $A_1B_1C_1$, площадь которого равна 1. Найдите площадь треугольника ABC.

4. На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно так, что $AM : MC = 4 : 5$, $BN : BC = 0,25$. Отрезки BM и AN пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника APM, если площадь треугольника ABC равна 63.

5. Внутри треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 так, что B_1 – середина AA_1, C_1 – середина BB_1, A_1 – середина CC_1. Найдите отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC.

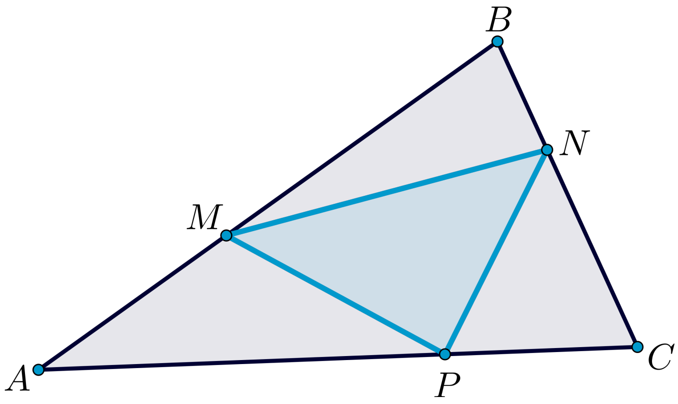
6. $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник, точки P, Q, R и S середины его сторон, причём $PQRS$ тоже выпуклый четырёхугольник. $A_1B_1C_1D_1$ другой выпуклый четырёхугольник с серединами сторон в точках P, Q, R и S.

   а) Докажите, что диагонали $PQRS$ точкой пересечения делятся пополам.

   б) Найдите максимально возможное значение величины $\dfrac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}}$.

7. $ABCD$ – параллелограмм, точки M и N лежат на сторонах AD и CD соответственно. AN пересекается с BM в точке P, AN пересекается с CM в точке Q, BN пересекается с CM в точке R. Докажите, что площади четырёхугольников $AQCD$ и $MBNQ$ равны.

1. **Ответ**. 45. **Решение**. $\triangle ABC$ и $\triangle MBN$ имеют общий угол B, при этом $BM = \frac{2}{3}BA$, $BN = \frac{1}{3}BC$.



Т.к. площади треугольников, имеющих общих угол, относятся как произведения сторон, образующих этот угол, то

$$\frac{S_{MBN}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{2}{3}BA \cdot \frac{1}{3}BC}{BA \cdot BC} = \frac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad S_{MBN} = \frac{2}{9}S_{ABC}$$

Аналогично рассуждая, получаем, что

$$S_{MAP} = S_{PCN} = \frac{2}{9}S_{ABC}$$

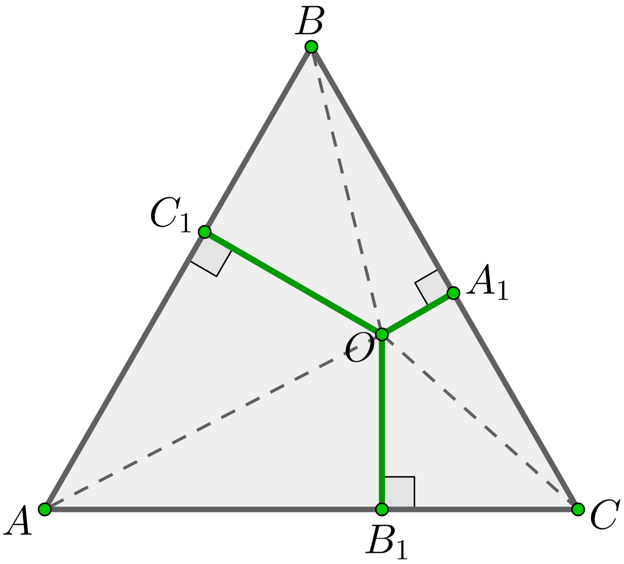
Следовательно,

$$15 + 3 \cdot \frac{2}{9}S_{ABC} = S_{ABC} \quad \Rightarrow \quad S_{ABC} = 3 \cdot 15 = 45.$$

2. **Ответ**. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}m$. **Решение**. Рассмотрим равносторонний $\triangle ABC$, $AB = m$, O – точка внутри треугольника, OA_1, OB_1, OC_1 — перпендикуляры на стороны BC, AC, AB соответственно.

Рассмотрим $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COA$. Их площади равны $0,5m \cdot OC_1$; $0,5m \cdot OA_1$; $0,5m \cdot OB_1$ соответственно. Тогда сумма их площадей равна площади всего $\triangle ABC$, следовательно:

$$0,5m\cdot(OC_1+OA_1+OB_1)=S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}m^2 \quad\Leftrightarrow\quad OC_1+OA_1+OB_1$$



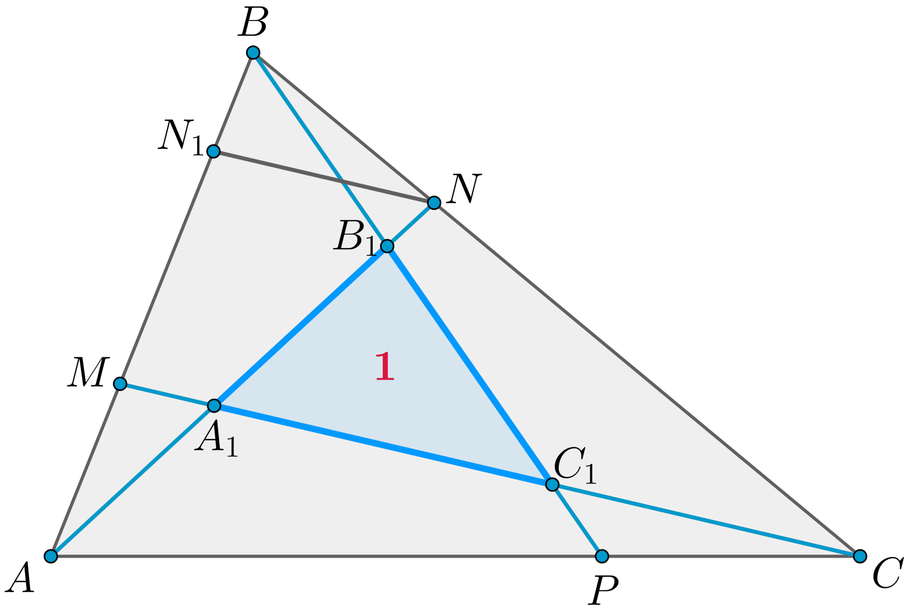
Таким образом, мы доказали, что для фиксированного равностороннего треугольника сумма постоянна, а также нашли ее.

3. **Ответ**. 7. **Решение**. 1) Найдем часть, которую составляет S_{MAA_1} от S_{ABC}. Для этого найдем, в каком отношении отрезок AN делится отрезком CM. Проведем $NN_1 \parallel CM$. Тогда по теореме Фалеса N_1 поделит отрезок BM в том же отношении, что N отрезок BC.
Следовательно, $BN_1=\frac{1}{3}BM=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}AB=\frac{2}{9}AB$.

Также по условию $AM=\frac{1}{3}AB$. Тогда

$$\frac{AA_1}{AN}=\frac{AM}{AN_1}=\frac{\frac{1}{3}AB}{AB-\frac{2}{9}AB}=\frac{3}{7}$$

Следовательно, т.к. треугольники MAA_1 и BAN имеют равный угол A, то их площади относятся как произведения сторон, образующих этот угол:



$$\frac{S_{\triangle MAA_1}}{S_{\triangle BAN}} = \frac{AM \cdot AA_1}{AB \cdot AN} = \frac{\frac{1}{3}AB \cdot \frac{3}{7}AN}{AB \cdot AN} = \frac{1}{7}$$

Таким образом, $S_{\triangle MAA_1} = \frac{1}{7}S_{\triangle BAN}$. Но в свою очередь $\triangle BAN$ и $\triangle ABC$ имеют одинаковую высоту, проведенную из вершины A, значит, их площади относятся как основания, то есть

$$\frac{S_{\triangle BAN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{3}$$

Таким образом, получаем $S_{\triangle MAA_1} = \frac{1}{21}S_{\triangle ABC}$.

2) Аналогичным образом получаем, что $S_{\triangle NBB_1} = \frac{1}{21}S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle PCC_1} = \frac{1}{21}S_{\triangle ABC}$.

Итак,

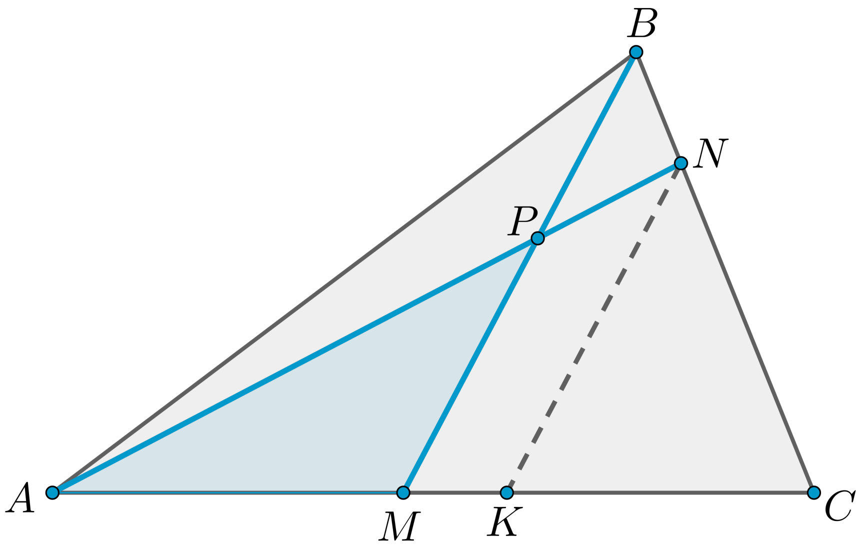
$1 = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABB_1} - S_{\triangle BCC_1} - S_{\triangle CAA_1} =$

$= S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle BAN} - S_{\triangle NBB_1}) - (S_{\triangle CBP} - S_{\triangle PCC_1}) - (S_{\triangle CAM} - S_{\triangle MAA_1})$

$= S_{\triangle ABC} - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}S_{\triangle ABC} - \frac{1}{21}S_{\triangle ABC}\right) = \dfrac{1}{7}S_{\triangle ABC}$

Следовательно, $S_{\triangle ABC} = 7$.

4. **Ответ**. 16. **Решение**. 1) Из условия задачи следует, что $BN = \frac{1}{4}BC$.



Обозначим $S_{\triangle ABC} = S$. Тогда т.к. $\triangle ABC$ и $\triangle ABN$ имеют одинаковую высоту, опущенную из вершины A, то

$$\frac{S}{S_{\triangle ABN}} = \frac{BC}{BN} = 4 \quad \Rightarrow \quad S_{\triangle ABN} = \frac{1}{4}S$$

Аналогично рассуждая, получим

$$\frac{S}{S_{\triangle ABM}} = \frac{AC}{AM} = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad S_{\triangle ABM} = \frac{4}{9}S$$

2) Найдем отношение $AP : PN$, чтобы определить, какую часть составляет $S_{\triangle ABP}$ от $S_{\triangle ABN}$.

Проведем прямую $NK \parallel BM$. Тогда по теореме Фалеса

$$\frac{BN}{BC} = \frac{MK}{MC} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} = \frac{MK}{MC} \quad \Rightarrow \quad MK = \frac{1}{4}MC$$

Т.к. по условию $AM : MC = 4 : 5$, то можно принять $AM = 4x$,

$MC = 5x$. Тогда $MK = \frac{5}{4}x$.

Опять же по теореме Фалеса

$$\frac{AP}{PN} = \frac{AM}{MK} \quad \Rightarrow \quad \frac{AP}{PN} = \frac{4x}{\frac{5}{4}x} = \frac{16}{5} \quad \Rightarrow \quad AP = \frac{16}{5}PN$$

Значит, т.к. $\triangle ABP$ и $\triangle ABN$ имеют одинаковую высоту, опущенную из вершины B, получаем

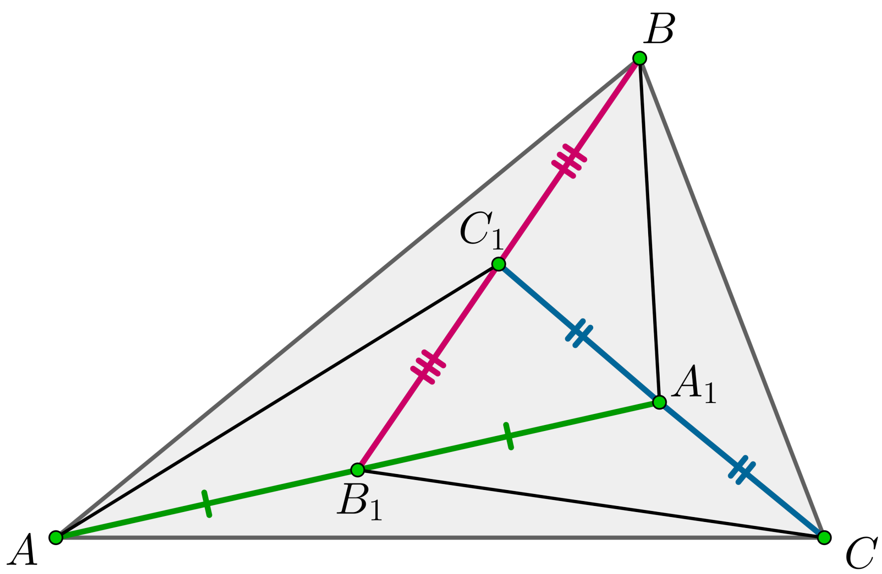
$$\frac{S_{\triangle ABN}}{S_{\triangle ABP}} = \frac{AN}{AP} = \frac{AP + PN}{AP} = \frac{21}{16}$$

Следовательно, $S_{\triangle ABP} = \frac{16}{21}S_{\triangle ABN} = \frac{4}{21}S$.

Следовательно,

$$S_{\triangle APM} = S_{\triangle ABM} - S_{\triangle ABP} = \frac{4}{9}S - \frac{4}{21}S = \frac{16}{63}S \quad \Rightarrow \quad S_{\triangle APM} = 16.$$

5. **Ответ**. 1 : 7. **Решение**. Соединим точки A и C_1, B и A_1, C и B_1.



Т.к. медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, то

$$S_{\triangle AB_1C} = S_{\triangle A_1B_1C} = S_{\triangle A_1B_1C_1}.$$

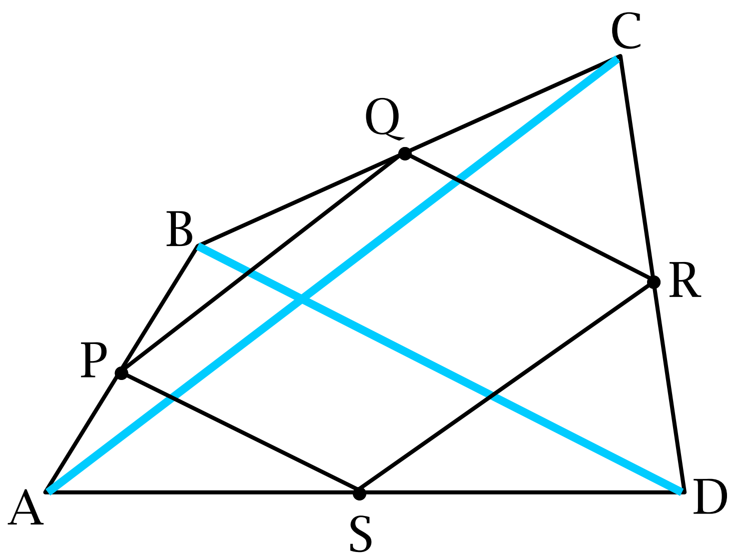
Аналогично,

$$S_{\triangle CA_1B} = S_{\triangle C_1A_1B} = S_{\triangle AC_1B} = S_{\triangle AC_1B_1}.$$

Таким образом, все семь образовавшихся треугольников имеют одинаковые площади. Значит,

$$S_{\triangle A_1B_1C_1} : S_{\triangle ABC} = 1 : 7.$$

6. **Ответ**. б) 1. **Решение**. а) Проведём диагонали AC и BD.



Рассмотрим треугольники APS и ABD: PS – средняя линия в треугольнике ABD, тогда треугольники APS и ABD подобны, причём $\dfrac{PS}{BD} = \dfrac{1}{2}$.

Аналогично $\dfrac{QR}{BD} = \dfrac{1}{2}$, следовательно, $PS = QR$.

Аналогично доказывается равенство $PQ = RS$. В итоге в выпуклом четырёхугольнике $PQRS$ противоположные стороны равны, тогда $PQRS$ – параллелограмм, следовательно, его диагонали точкой пересечения делятся пополам.

б) Докажем, что по взаимному расположению середин сторон выпуклого четырёхугольника его площадь восстанавливается однозначно.

Из подобия APS и ABD получаем:

$$\frac{S_{APS}}{S_{ABD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Аналогично $4S_{QCR} = S_{CBD}$, $4S_{PBQ} = S_{ABC}$, $4S_{SDR} = S_{ACD}$. Тогда

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CBD} = 4S_{APS} + 4S_{QCR}.$$

С другой стороны,

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 4S_{PBQ} + 4S_{SDR},$$

тогда

$$S_{ABCD}+S_{ABCD} = 4S_{APS}+4S_{QCR}+4S_{PBQ}+4S_{SDR} \quad \Leftrightarrow \quad S_{APS}+S_{QCR}$$

Но $S_{ABCD} = S_{APS} + S_{QCR} + S_{PBQ} + S_{SDR} + S_{PQRS}$, откуда окончательно

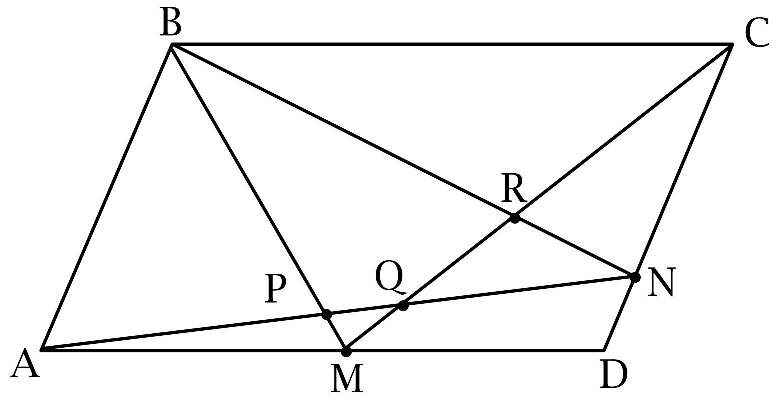
$$S_{PQRS} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Таким образом, по взаимному расположению точек P, Q, R, S однозначно восстанавливается площадь параллелограмма $PQRS$, а значит и площадь любого выпуклого четырёхугольника с серединами сторон в точках P, Q, R и S.

В итоге

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = 1.$$

7. **Решение**. Рассмотрим треугольник ABN: его площадь равна $0,5 \cdot AB \cdot h_1$, где h_1 – длина высоты, опущенной из точки D на AB, следовательно, $S_{ABN} = 0,5 \cdot S_{ABCD}$.



Рассмотрим треугольник BMC: его площадь равна $0,5 \cdot BC \cdot h_2$, где h_2 – длина высоты, опущенной из точки D на BC, следовательно, $S_{BMC} = 0,5 \cdot S_{ABCD}$, тогда

$$S_{ABM} + S_{MCD} = 0,5 \cdot S_{ABCD}.$$

Таким образом, $S_{ABN} = S_{ABM} + S_{MCD}$, откуда

$$(S_{ABP} + S_{PBN}) = (S_{ABP} + S_{APM}) + S_{MCD} \Leftrightarrow S_{PBN} = S_{APM} + S_{MCD}.$$

тогда

$$S_{PBN} + S_{PQM} = S_{APM} + S_{MCD} + S_{PQM},$$

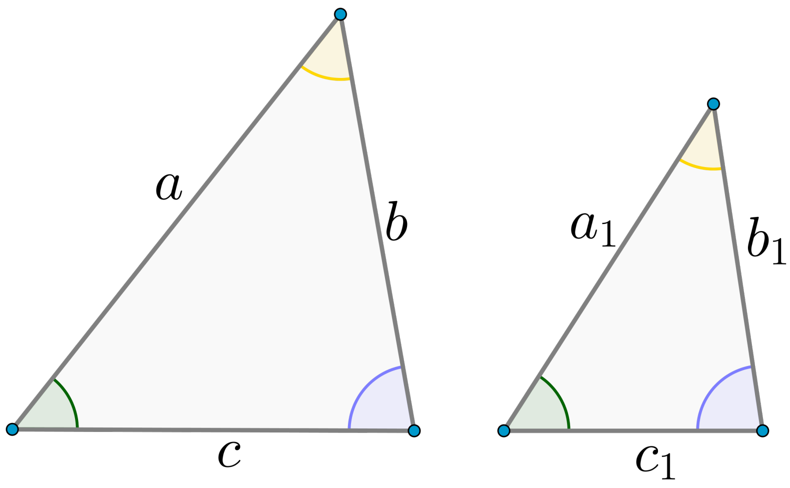
но $S_{PBN} + S_{PQM} = S_{MBNQ}$, а $S_{APM} + S_{MCD} + S_{PQM} = S_{AQCD}$. В итоге $S_{MBNQ} = S_{AQCD}$, что и требовалось доказать.

Урок 16. Подобие треугольников

Определения

Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого
(стороны называются сходственными, если они лежат напротив равных углов).
Стороны пропорциональны – то есть все стороны одного треугольника в k раз больше сторон другого треугольника. Тогда число k называют коэффициентом подобия. То есть это число, равное отношению сходственных сторон этих треугольников.

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k$$



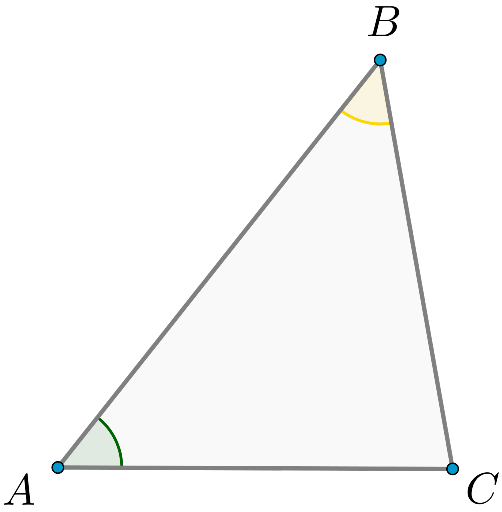
Теорема (первый признак подобия треугольников)

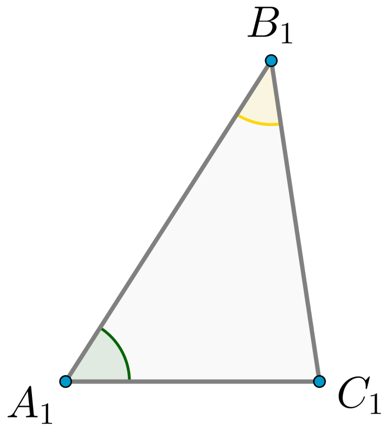
Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ – треугольники такие, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Тогда по теореме о сумме углов треугольника $\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - \angle A_1 - \angle B_1 = \angle C_1$, то есть углы треугольника ABC соответственно равны углам треугольника $A_1B_1C_1$.

Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ и





$\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB \cdot BC}{A_1B_1 \cdot B_1C_1}$.

Из этих равенств следует, что $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$.

Аналогично доказывается, что $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$ (используя равенства $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$).

В итоге, стороны треугольника ABC пропорциональны сходственным сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.

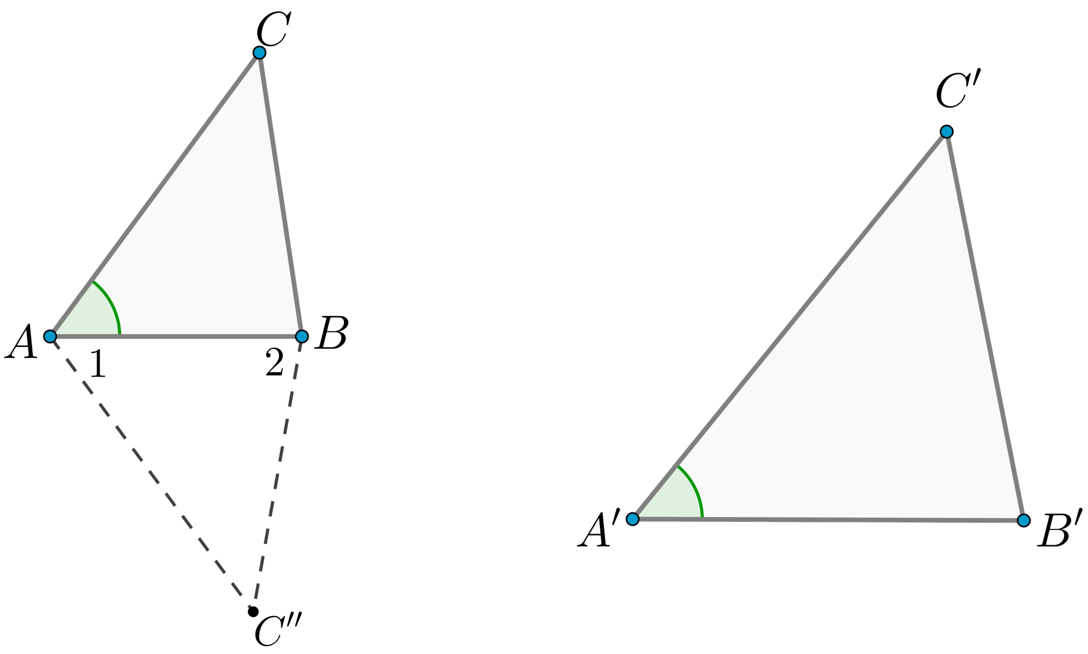
Теорема (второй признак подобия треугольников)

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Рассмотрим два треугольника ABC и $A'B'C'$, таких что $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$, $\angle BAC = \angle A'$. Докажем, что треугольники ABC и $A'B'C'$ – подобны. Учитывая первый признак подобия треугольников, достаточно показать, что $\angle B = \angle B'$.

Рассмотрим треугольник ABC'', у которого $\angle 1 = \angle A'$, $\angle 2 = \angle B'$.



Треугольники ABC'' и $A'B'C'$ подобны по первому признаку подобия треугольников, тогда $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC''}{A'C'}$.

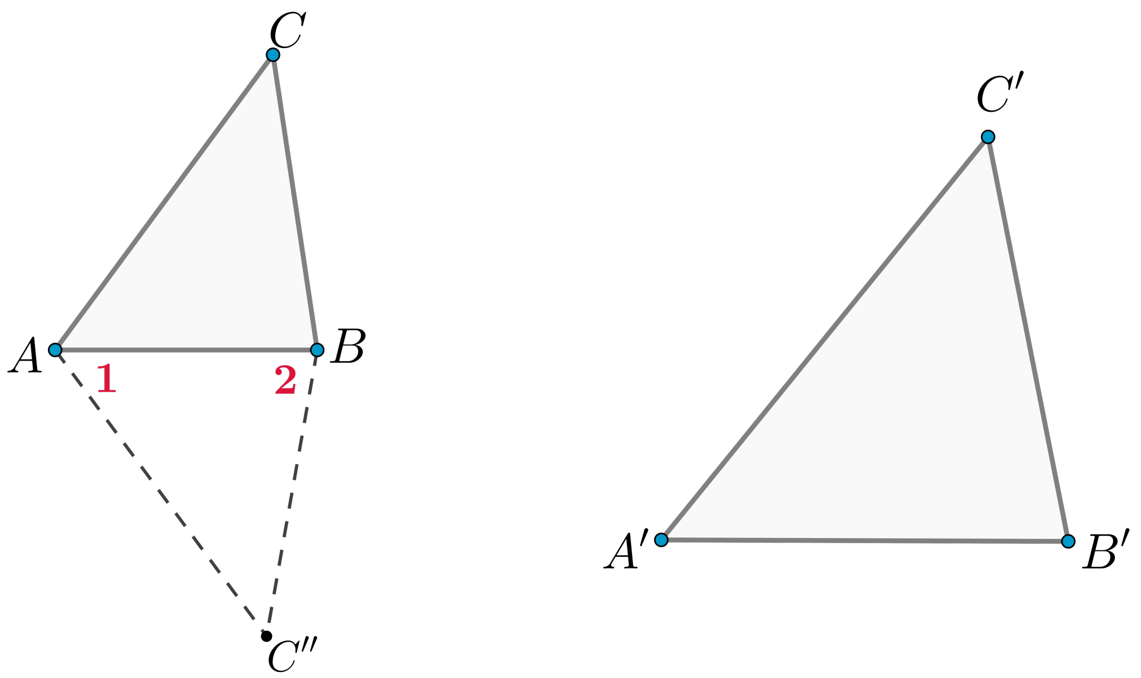
С другой стороны, по условию $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$. Из последних двух равенств следует, что $AC = AC''$.

Треугольники ABC и ABC'' равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $\angle B = \angle 2 = \angle B'$.

Теорема (третий признак подобия треугольников)
Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство
Пусть стороны треугольников ABC и $A'B'C'$ пропорциональны: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$. Докажем, что треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны.

Для этого, учитывая второй признак подобия треугольников, достаточно доказать, что $\angle BAC = \angle A'$.



Рассмотрим треугольник ABC'', у которого $\angle 1 = \angle A'$, $\angle 2 = \angle B'$.

Треугольники ABC'' и $A'B'C'$ подобны по первому признаку подобия треугольников, следовательно, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC''}{B'C'} = \dfrac{C''A}{C'A'}$.

Из последней цепочки равенств и условия $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$ вытекает, что $BC = BC''$, $CA = C''A$.

Треугольники ABC и ABC'' равны по трем сторонам, следовательно, $\angle BAC = \angle 1 = \angle A'$.

Определение
Периметр треугольника – это сумма длин всех его сторон.

Теорема
Отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

Доказательство
Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ со сторонами a, b, c и a_1, b_1, c_1 соответственно.

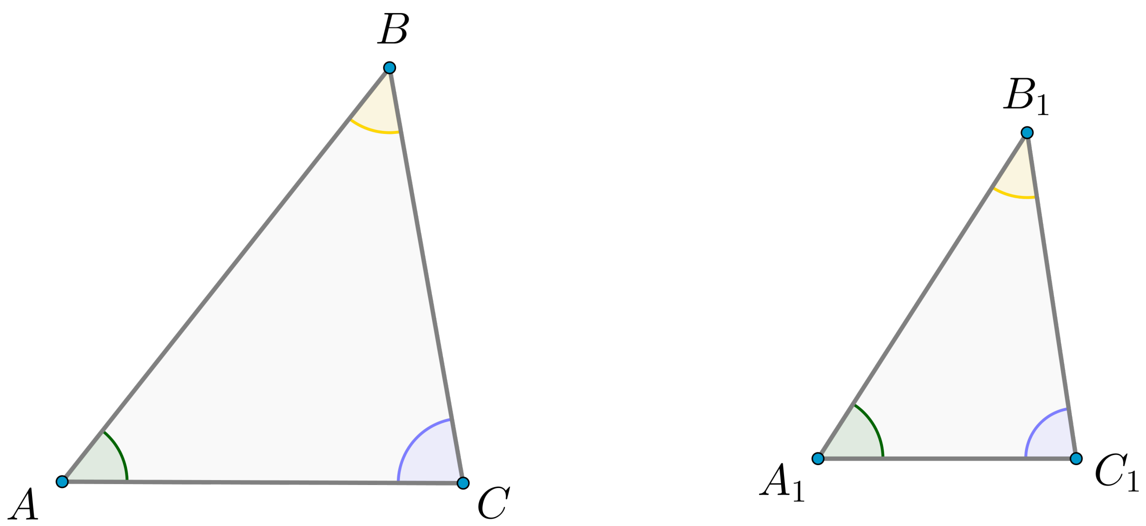
Тогда $P_{ABC} = a+b+c = ka_1+kb_1+kc_1 = k(a_1+b_1+c_1) = k \cdot P_{A_1B_1C_1}$

Теорема

Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Доказательство

Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, причём $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = k$. Обозначим буквами S и S_1 площади этих треугольников соответственно.



Так как $\angle A = \angle A_1$, то $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ (по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу).

Так как $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = k$, то $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1} \cdot \dfrac{AC}{A_1C_1} = k \cdot k = k^2$, что и требовалось доказать.

Напомним основные определения и теоремы, которые уже были изучены.

Теорема Фалеса (частный случай)

Если на одной из сторон угла отметить равные между собой отрезки и через их концы провести параллельные прямые, то эти прямые отсекут на второй стороне также равные между собой отрезки.

Определение

Средняя линия треугольника – это отрезок, соединяющий середины любых двух сторон треугольника.

Теорема

Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Следствие

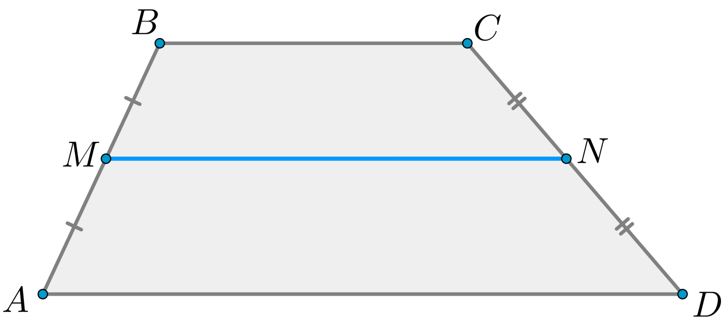
Средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, подобный данному с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Определение

Средняя линия трапеции – отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

Теорема

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.



$$MN \parallel AD \parallel BC$$

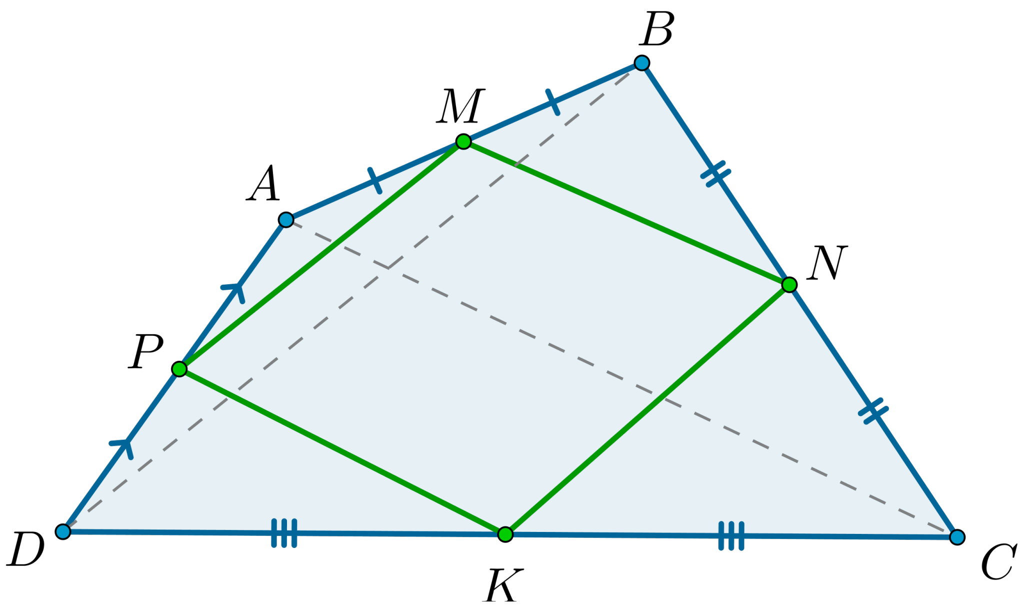
$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

С помощью данных фактов доказывается важная теорема.

Теорема Вариньона

Выпуклый четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон произвольного четырехугольника, является параллелограммом.

Доказательство



Проведем диагонали четырехугольника $ABCD$. Рассмотрим $\triangle ABC$: MN – средняя линия этого треугольника, следовательно, $MN \parallel AC$.

Рассмотрим $\triangle ADC$: PK – средняя линия этого треугольника, следовательно, $PK \parallel AC$.

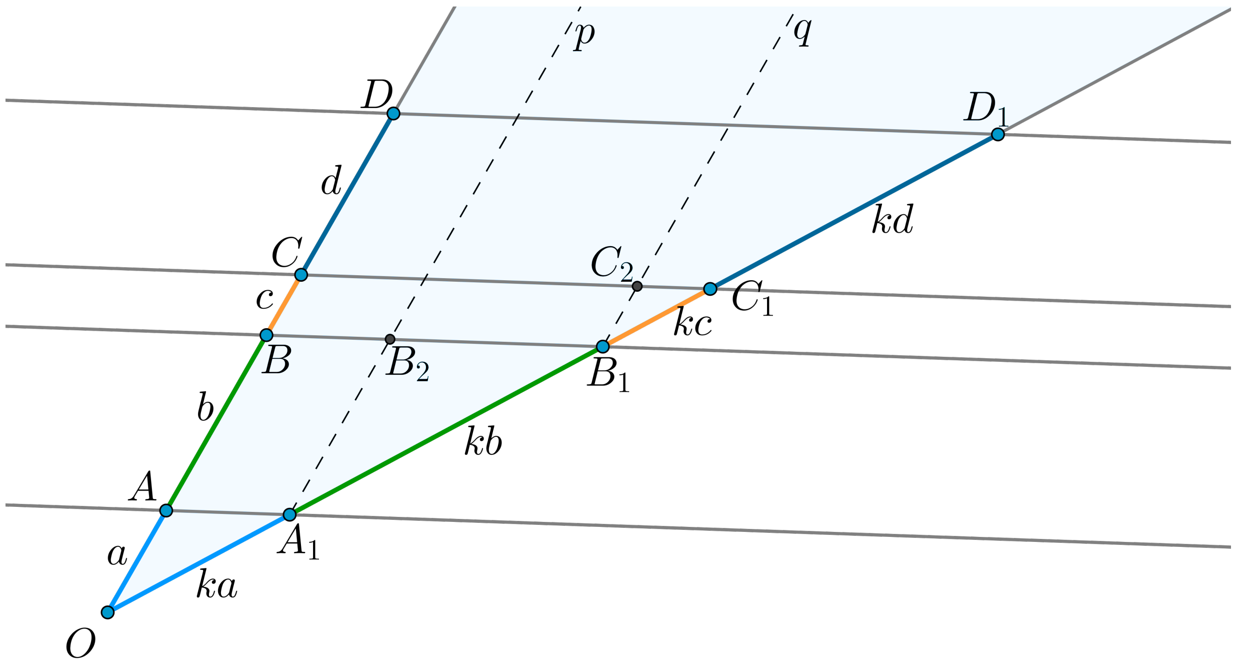
Таким образом, $MN \parallel AC \parallel PK$.

Аналогичным образом доказывается, что $MP \parallel BD \parallel NK$.

Следовательно, по определению $MNKP$ – параллелограмм.

Из подобия треугольников следуют важные факты.

Теорема Фалеса (общий случай)
Параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки.



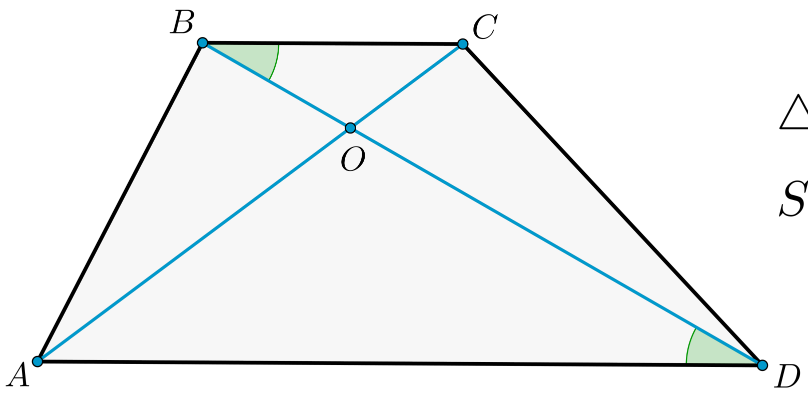
Доказательство
Пусть параллельные прямые $p \parallel q \parallel r \parallel s$ разбили одну из прямых на отрезки a, b, c, d. Тогда вторую прямую эти прямые должны разбить на отрезки ka, kb, kc, kd соответственно, где k – некоторое число, тот самый коэффициент пропорциональности отрезков.

Проведем через точку A_1 прямую $p \parallel OD$ (ABB_2A_1 — параллелограмм, следовательно, $AB = A_1B_2$). Тогда $\triangle OAA_1 \sim \triangle A_1B_1B_2$ по двум углам. Следовательно, $\dfrac{OA}{A_1B_2} = \dfrac{OA_1}{A_1B_1} \Rightarrow A_1B_1 = kb$.

Аналогично проведем через B_1 прямую $q \parallel OD \Rightarrow \triangle OBB_1 \sim \triangle B_1C_1C_2 \Rightarrow B_1C_1 = kc$ и т.д.

Теорема

Диагонали делят трапецию на четыре треугольника, два из которых подобны, а два другие – равновелики.



$\triangle BOC \sim \triangle AOD$

$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$

Доказательство

Т.к. $AD \parallel BC$ и BD – секущая, то $\angle DBC = \angle BDA$ как накрест лежащие.
Также $\angle BOC = \angle AOD$ как вертикальные.
Следовательно, по двум углам $\triangle BOC \sim \triangle AOD$.

Докажем, что $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$. Пусть h – высота трапеции. Тогда $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AD = S_{\triangle ACD}$. Тогда:

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AOD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AOD} = S_{\triangle COD}$$

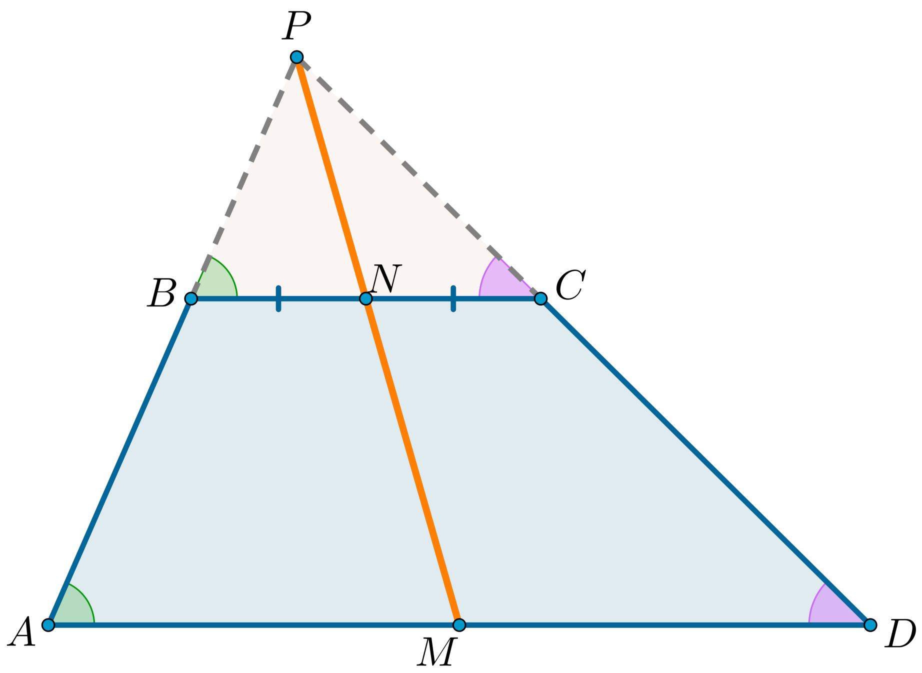
Теорема: свойство произвольной трапеции

Середины оснований, точка пересечения диагоналей трапеции и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

Доказательство

1) Докажем, что точки P, N и M лежат на одной прямой.

Проведем прямую PN (P – точка пересечения продолжений боковых сторон, N – середина BC). Пусть она пересечет сторону AD в точке M. Докажем, что M – середина AD.



Рассмотрим $\triangle BPN$ и $\triangle APM$. Они подобны по двум углам ($\angle APM$ – общий, $\angle PAM = \angle PBN$ как соответственные при $AD \parallel BC$ и AB секущей). Значит:

$$\frac{BN}{AM} = \frac{PN}{PM}$$

Рассмотрим $\triangle CPN$ и $\triangle DPM$. Они подобны по двум углам ($\angle DPM$ – общий, $\angle PDM = \angle PCN$ как соответственные при $AD \parallel BC$ и CD секущей). Значит:

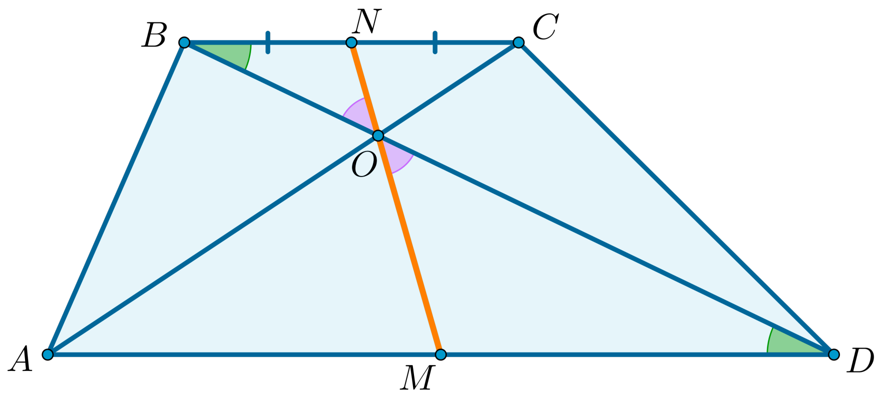
$$\frac{CN}{DM} = \frac{PN}{PM}$$

Отсюда $\dfrac{BN}{AM} = \dfrac{CN}{DM}$. Но $BN = NC$, следовательно, $AM = DM$.

2) Докажем, что точки N, O, M лежат на одной прямой.

Пусть N – середина BC, O – точка пересечения диагоналей. Проведем прямую NO, она пересечет сторону AD в точке M. Докажем, что M – середина AD.

$\triangle BNO \sim \triangle DMO$ по двум углам ($\angle OBN = \angle ODM$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и BD секущей; $\angle BON = \angle DOM$ как вер-



тикальные). Значит:

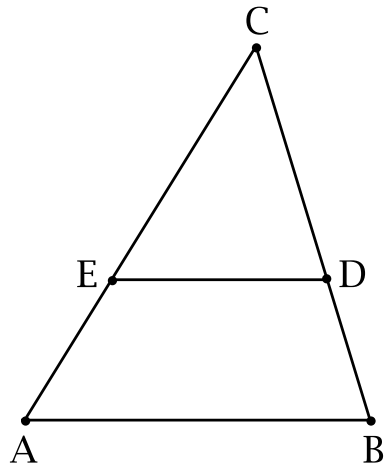
$$\frac{BN}{MD} = \frac{ON}{OM}$$

Аналогично $\triangle CON \sim \triangle AOM$. Значит:

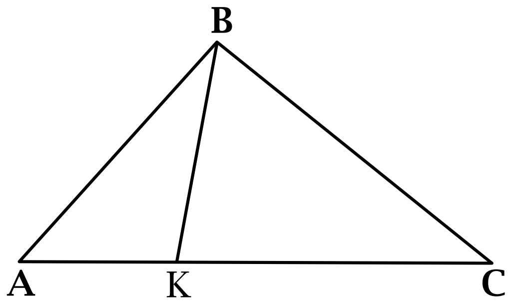
$$\frac{CN}{MA} = \frac{ON}{OM}$$

Отсюда $\dfrac{BN}{MD} = \dfrac{CN}{MA}$. Но $BN = CN$, следовательно, $AM = MD$.

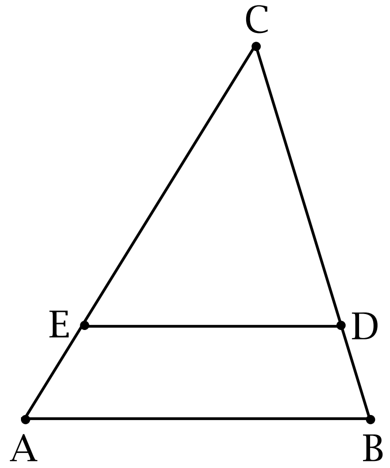
1. Точка E лежит на стороне AC треугольника ABC, причём $\dfrac{EC}{AE} = 2$. Точка D лежит на BC, причём $ED \parallel AB$. Найдите AB, если $ED = \dfrac{4}{3}$.



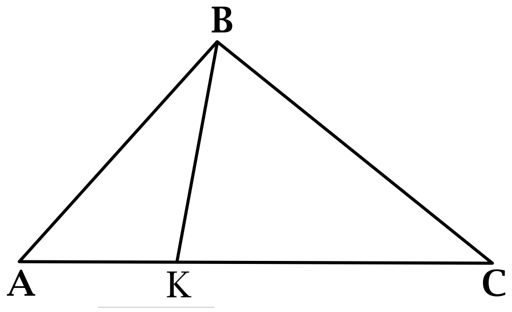
2. Отрезок BK соединяет вершину B треугольника ABC с точкой на противоположной стороне, причем $\angle AKB = \angle B$. При этом известно, что $BK = 10$, $AB = 12$, $AC = 18$. Найдите BC.



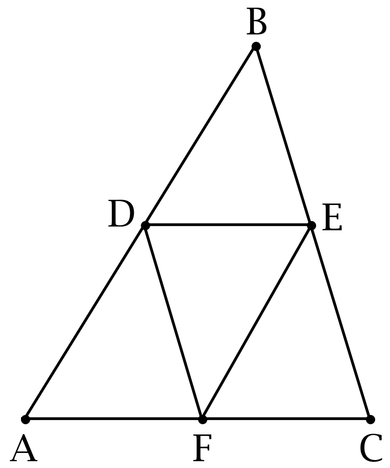
3. Точка E лежит на стороне AC треугольника ABC, причём $\dfrac{EC}{AE} = 3$. Точка D лежит на BC, причём $\dfrac{CD}{CB} = 0,75$. Найдите $\angle CED - \angle CAB$. Ответ дайте в градусах.



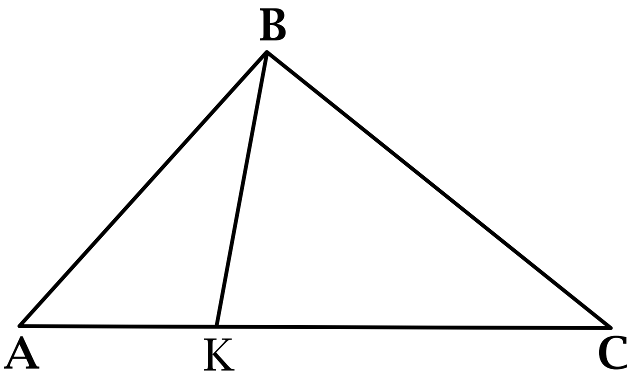
4. Отрезок BK соединяет вершину B треугольника ABC с точкой на противоположной стороне. При этом известно, что $\angle AKB = 105°$, $AB = 12$, $AC = 24$, $AK = 6$. Найдите $\angle ABC$. Ответ дайте в градусах.



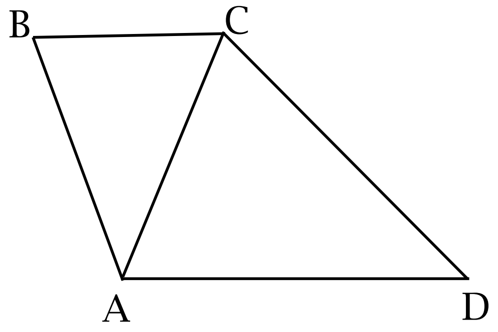
5. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC лежат точки D, E и F соответственно. Известно, что $\dfrac{DF}{BC} = 0,5$, $AC = 2 \cdot DE$, $AB - EF = EF$ $\angle DEF = 61°$, $\angle EFD = 55°$. Найдите $\angle C$. Ответ дайте в градусах.



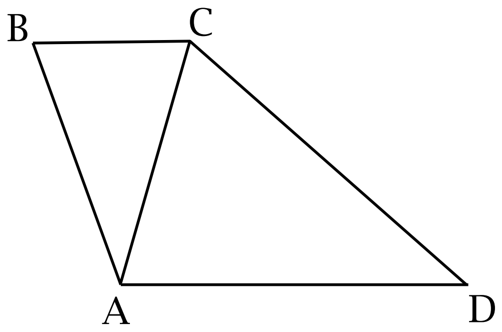
6. Отрезок BK соединяет вершину B треугольника ABC с точкой на противоположной стороне. При этом известно, что $AB = 12$, $AC = 24$, $AK = 6$, $BK = 10$, $BC = 20$. Найдите $\angle AKB - \angle B$. Ответ дайте в градусах.



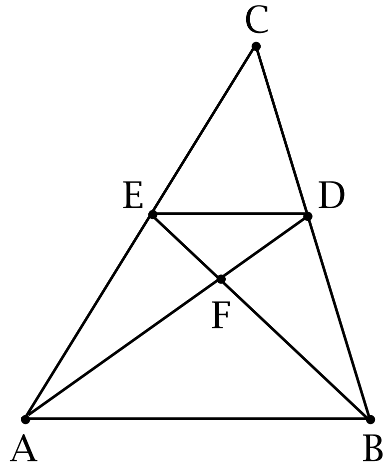
7. В четырёхугольнике $ABCD$: $BC = 5$, $AD = 20$, $\angle B = \angle ACD$, $\angle D = \angle BAC$. Найдите AC.



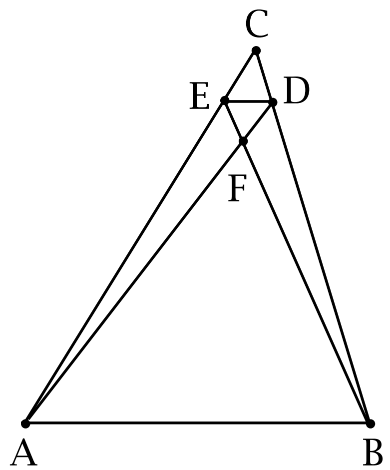
8. В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = 7,5$ и $AD = 30$ диагональ $AC = 15$. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $S_{ABC} = 2$.



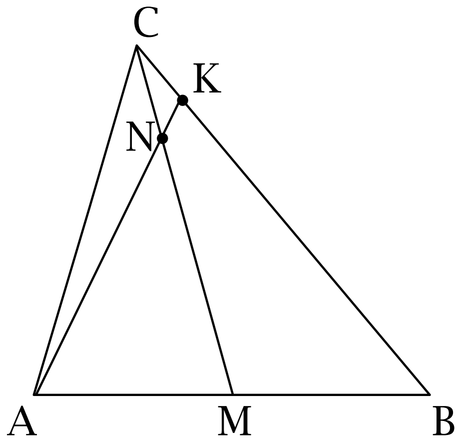
9. F – точка пересечения AD и BE – медиан треугольника ABC. Известно, что $S_{ABF} = 1$. Найдите S_{DEF}.



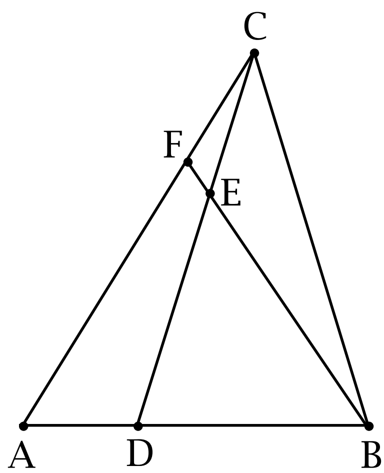
10. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC, причём $\dfrac{CD}{DB} = 0,2$. Точка E лежит на стороне AC, причём $\dfrac{CE}{CA} = \dfrac{1}{6}$. Найдите $\dfrac{S_{ABF}}{S_{EFD}}$, если F – точка пересечения AD и BE.



11. В треугольнике ABC: CM – медиана, точка N лежит на CM так, что $\dfrac{CN}{CM} = 0,25$, AK проходит через точку N, причём точка K лежит на BC. Найдите $\dfrac{KB}{CK}$.



12. Точка D лежит на стороне AB треугольника ABC, причём $\dfrac{AD}{DB} = 0,5$. Точка E лежит на CD, причём $\dfrac{CE}{ED} = 0,5$. Точка F лежит на пересечении прямых, содержащих отрезки AC и BE. Найдите $\dfrac{AF}{FC}$.



13. В остроугольном треугольнике ABC: $\angle B = 60°$, AM и CN – высоты, а точка Q – середина AC.

а) Докажите, что $\triangle MNQ$ – равнобедренный.

б) Найдите $\dfrac{\angle MNQ}{\angle NQM}$.

14. Вершины квадрата $PQRS$ лежат на сторонах треугольника ABC (P лежит на AB, Q и R лежат на BC, S лежит на AC). AK – высота в треугольнике ABC.

    а) Докажите, что если $\angle BAC = 90°$, то $BP \cdot AS = AP \cdot CS$.

    б) Найдите $\dfrac{PQ}{BC}$, если $AK = \dfrac{1}{2}BC$.

15. Основания трапеции равны a и b. Диагонали трапеции пересекаются в точке O под прямым углом. Одна из диагоналей делится точкой O на отрезки с длинами c_1 и d_1, а другая – на отрезки с длинами c_2 и d_2.

    а) Докажите, что величина

$$\frac{c_1d_1 + c_2d_2}{2}$$

    равна площади прямоугольного треугольника с катетами a и b.

    б) Найдите площадь данной трапеции, если $ab = 100$, а c_2, d_1 и d_2 удовлетворяют уравнению

$$100 \cdot \frac{c_2 + d_2}{d_1} - \frac{{c_2}^2 d_2 + c_2 {d_2}^2}{d_1} + d_1(c_2 + d_2) - 500 = 0.$$

1. **Ответ**. 2. **Решение**. Так как $ED \parallel AB$, то $\angle CED = \angle CAB$, $\angle CDE = \angle CBA$ (как соответственные при параллельных прямых и секущей), тогда треугольники CED и CAB подобны.

   Так как $EC = 2 \cdot AE$, то $AC = 3 \cdot AE$, следовательно,
$$\frac{AC}{EC} = \frac{3 \cdot AE}{2 \cdot AE} = \frac{3}{2}.$$
   Так как стороны EC и AC лежат против равных углов (в треугольниках CED и CAB соответственно), то
$$\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EC} = \frac{3}{2},$$
   откуда
$$AB = \frac{3}{2} \cdot ED = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2.$$

2. **Ответ**. 15. **Решение**. Рассмотрим треугольники ABK и ACB:
   $\angle AKB = \angle B$,
   $\angle A$ – общий, тогда треугольники ABK и ACB подобны по двум углам.

   В подобных треугольниках против равных углов лежат пропорциональные стороны, тогда
$$\frac{BK}{BC} = \frac{AB}{AC},$$
   откуда $\dfrac{10}{BC} = \dfrac{12}{18}$, следовательно $BC = 15$.

3. **Ответ**. 0. **Решение**. Рассмотрим треугольники CAB и CED:
   $\angle C$ – общий,
$$\frac{CA}{CE} = \frac{AE + CE}{CE} = \frac{AE}{CE} + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} = \frac{CB}{CD},$$

тогда треугольники CAB и CED подобны по пропорциональности двух сторон и равенству углов между ними.

В подобных треугольниках против пропорциональных сторон лежат равные углы, тогда $\angle CED = \angle CAB$, откуда $\angle CED - \angle CAB = 0°$.

4. **Ответ**. 105. **Решение**. Рассмотрим треугольники ABK и ACB: $\angle A$ – общий,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AK}{AB},$$

тогда треугольники ABK и ACB подобны по пропорциональности двух сторон и равенству углов между ними.

В подобных треугольниках против пропорциональных сторон лежат равные углы, тогда $\angle ABC = \angle AKB = 105°$.

5. **Ответ**. 64. **Решение**. Так как $\angle DEF = 61°$, $\angle EFD = 55°$, то $\angle EDF = 180° - 61° - 55° = 64°$.

Рассмотрим треугольники ABC и EFD: по условию

$$\frac{DF}{BC} = 0,5 = \frac{DE}{AC} = \frac{EF}{AB},$$

тогда треугольники ABC и EFD подобны по пропорциональности трех сторон.

В подобных треугольниках против пропорциональных сторон лежат равные углы, тогда $\angle C = \angle EDF = 64°$.

6. **Ответ**. 0. **Решение**. Рассмотрим треугольники ABK и ACB:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AK}{AB} = \frac{BK}{BC},$$

тогда треугольники ABK и ACB подобны по пропорциональности трех сторон.

В подобных треугольниках против пропорциональных сторон лежат равные углы, тогда $\angle B = \angle AKB$, следовательно $\angle AKB - \angle B = 0^\circ$.

7. **Ответ**. 10. **Решение**. Треугольники ABC и ACD подобны по двум углам ($\angle B = \angle ACD$, $\angle D = \angle BAC$).
Так как в подобных треугольниках против равных углов лежат пропорциональные стороны, то
$\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$. Обозначим $AC = x$, тогда имеем

$$\frac{5}{x} = \frac{x}{20},$$

откуда $x^2 = 100$, следовательно, $x = \pm 10$, но $x > 0$, тогда $x = 10$.

8. **Ответ**. 10. **Решение**. Рассмотрим треугольники ABC и ACD: $\angle BCA = \angle CAD$,

$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{2} = \frac{AC}{AD},$$

тогда треугольники ABC и ACD подобны по пропорциональности двух сторон и равенству углов между ними, следовательно, их площади относятся как квадрат коэффициента подобия:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

откуда $S_{ACD} = 4 \cdot S_{ABC} = 8$.
$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 2 + 8 = 10$.

9. **Ответ**. 0,25. **Решение**. ED – средняя линия треугольника ABC, тогда $ED = 0,5 \cdot AB$, $ED \parallel AB$.
Так как $ED \parallel AB$, то $\angle DEF = \angle ABF$, $\angle EDF = \angle FAB$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых и секущей), следовательно, треугольники DEF и ABF подобны (по

двум углам). Так как $ED = 0,5 \cdot AB$, причём стороны ED и AB лежат (в треугольниках DEF и ABF соответственно) против равных углов, то

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABF}} = \left(\frac{ED}{AB}\right)^2 = 0,5^2 = 0,25,$$

откуда с учётом того, что $S_{ABF} = 1$ находим $S_{DEF} = 0,25$.

10. **Ответ**. 36. **Решение**. Рассмотрим треугольники ABC и EDC:

$\angle C$ – общий; $\dfrac{CE}{CA} = \dfrac{1}{6}$; так как $\dfrac{CD}{DB} = 0,2$, то $DB = 5CD$ и, значит, $\dfrac{CD}{CB} = \dfrac{1}{6} = \dfrac{CE}{CA}$,

тогда треугольники ABC и EDC подобны по пропорциональности двух сторон и равенству углов между ними, следовательно,

$\dfrac{ED}{AB} = \dfrac{1}{6}$ и $\angle CED = \angle CAB$.

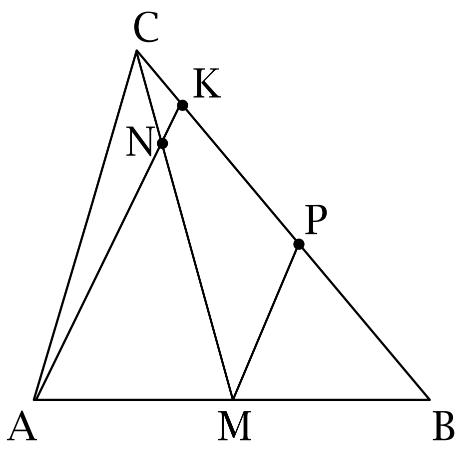
Из равенства соответственных углов при параллельных прямых и секущей ($\angle CED = \angle CAB$) следует, что $ED \parallel AB$, откуда можно сделать вывод: $\angle DEF = \angle ABF$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых и секущей).

Кроме того, $\angle EFD = \angle AFB$ как вертикальные, тогда треугольники ABF и DEF подобны (по двум углам).

Так как $\dfrac{ED}{AB} = \dfrac{1}{6}$, то $\dfrac{AB}{ED} = 6$, то есть коэффициент подобия треугольников ABF и DEF равен 6. Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия, тогда

$$\frac{S_{ABF}}{S_{EFD}} = 6^2 = 36.$$

11. **Ответ**. 6. **Решение**. Построим $MP \parallel AK$:



Обозначим $KP = x$, $CK = y$. MP – средняя линия в треугольнике ABK, тогда $BP = x$.
Треугольники CKN и CPM – подобны по двум углам ($\angle MCP$ – общий, $\angle CNK = \angle CMP$, как соответственные при параллельных прямых и секущей), тогда

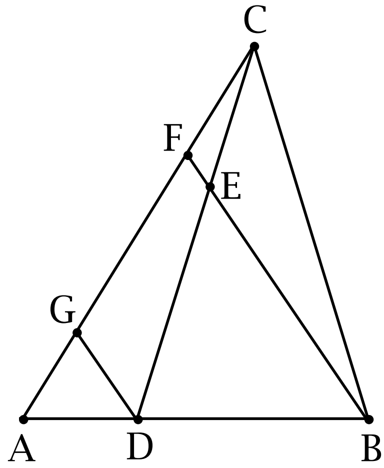
$\dfrac{CN}{CM} = \dfrac{CK}{CP}$, то есть $0,25 = \dfrac{y}{y+x}$, откуда $4 = \dfrac{y+x}{y}$, то есть $\dfrac{x}{y} = 3$. $KB = 2x$, тогда

$$\frac{KB}{CK} = \frac{2x}{y} = 2 \cdot \frac{x}{y} = 2 \cdot 3 = 6.$$

12. **Ответ**. 3. **Решение**. Построим $DG \parallel BF$:
Обозначим $AG = x$, $FC = y$.
Рассмотрим треугольники ADG и ABF: $\angle A$ – общий, $\angle AGD = \angle AFB$ (как соответственные при параллельных прямых и секущей), тогда треугольники ADG и ABF подобны по двум углам и

$$\frac{AG}{AF} = \frac{AD}{AB}.$$

Так как $\dfrac{AD}{DB} = 0,5$, то $DB = 2 \cdot AD$, тогда $AB = 3 \cdot AD$ и



$\dfrac{1}{3} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AG}{AF}$, тогда $AF = 3x$, следовательно,

$$FG = 2x.$$

Аналогично можно сделать выводы о том, что:
Треугольники CEF и CDG подобны по двум углам, тогда $\dfrac{CF}{CG} = \dfrac{CE}{CD} = \dfrac{1}{3}$, тогда $\dfrac{y}{y+2x} = \dfrac{1}{3}$, откуда

$\dfrac{y+2x}{y} = 3$, то есть $\dfrac{2x}{y} = 2$, следовательно, $3 = \dfrac{3x}{y} = \dfrac{AF}{FC}$.

13. **Ответ**. б) 1. **Решение**. а) NQ – медиана в прямоугольном треугольнике ANC, тогда

$$NQ = 0,5 \cdot AC,$$

MQ – медиана в прямоугольном треугольнике AMC, тогда

$$MQ = 0,5 \cdot AC = NQ.$$

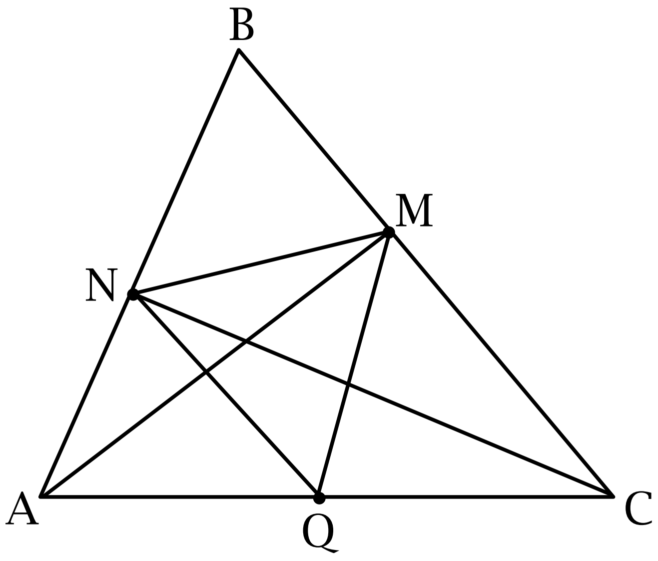
б) Рассмотрим прямоугольный треугольник ABM:

$\angle BAM = 90^\circ - \angle ABM = 30^\circ \Rightarrow BM = AB \cdot \sin \angle BAM = 0,5 \cdot AB.$

Рассмотрим прямоугольный треугольник BCN:

$\angle BCN = 90^\circ - \angle ABM = 30^\circ$, откуда

$$BN = BC \cdot \sin \angle BAM = 0,5 \cdot BC.$$



Так как

$$\frac{1}{2} = \frac{BN}{BC} = \frac{BM}{AB},$$

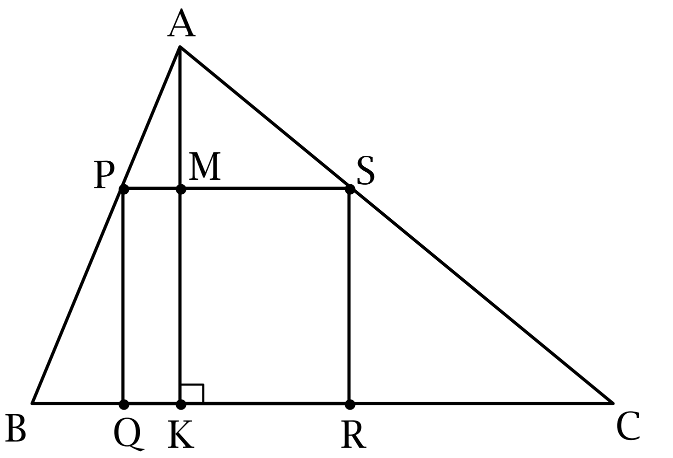
а $\angle ABC$ – общий для треугольников BMN и ABC, лежащий между пропорциональными сторонами, то треугольники BMN и ABC подобны, откуда

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2},$$

то есть $MN = 0,5 \cdot AC = MQ = NQ$, следовательно, $\angle MNQ = \angle NQM$ и

$$\frac{\angle MNQ}{\angle NQM} = 1.$$

14. **Ответ**. б) $\frac{1}{3}$. **Решение**. а) Рассмотрим треугольники APS и PBQ: $\angle BQP = 90^\circ = \angle PAS$. Так как $\angle SPQ = 90^\circ$, то $\angle APS + \angle BPQ = 90^\circ$, откуда $\angle APS = \angle PBQ$, следовательно, треугольники APS и PBQ подобны по двум углам.



Из подобия этих треугольников получаем:

$$\frac{PS}{BP} = \frac{AS}{PQ},$$

но $PS = PQ$, тогда $PS^2 = AS \cdot BP$.

Аналогично треугольники APS и SCR подобны по двум углам, откуда

$$\frac{PS}{SC} = \frac{AP}{SR},$$

но $PS = SR$, тогда $PS^2 = AP \cdot SC$.

В итоге

$$AS \cdot BP = PS^2 = AP \cdot SC,$$

что и требовалось доказать.

б) Так как $PQRS$ квадрат, то $PS \parallel QR$, откуда следует равенство $\angle APS = \angle ABC$ как односторонних углов при параллельных прямых и секущей, а также то, что $AK \perp PS$. Пусть M – точка пересечения AK и PS.

Рассмотрим треугольники APM и ABK: $\angle APM = \angle ABK$, $\angle PAM$ – общий, тогда треугольники APM и ABK подобны по двум углам, откуда

$$\frac{AM}{AK} = \frac{AP}{AB}.$$

Рассмотрим треугольники APS и ABC: $\angle APS = \angle ABC$, $\angle BAC$

– общий, тогда треугольники APS и ABC подобны по двум углам, откуда

$$\frac{PS}{BC} = \frac{AP}{AB}.$$

В итоге

$$\frac{AM}{AK} = \frac{AP}{AB} = \frac{PS}{BC},$$

следовательно,

$$\frac{AK - MK}{AK} = \frac{PS}{BC}.$$

Так как PQ и MK – отрезки параллельных прямых, заключённых между параллельными прямыми PS и BC, то $MK = PQ$.

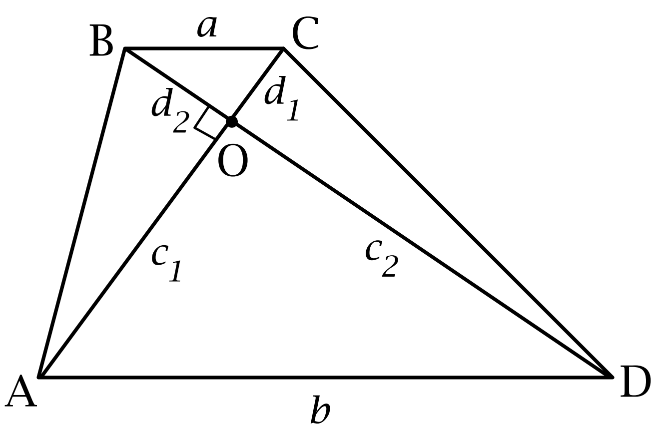
$PS = PQ$, $AK = 0,5 \cdot BC$, тогда

$$\frac{0,5 \cdot BC - PQ}{0,5 \cdot BC} = \frac{PQ}{BC},$$

следовательно, $BC - 2PQ = PQ$, значит,

$$BC = \frac{1}{3} \cdot PQ \qquad \Rightarrow \qquad \frac{PQ}{BC} = \frac{1}{3}.$$

15. **Ответ**. б) 500. **Решение** а) Пусть $ABCD$ – данная трапеция,



$BC = a$, $AD = b$.

Рассмотрим треугольники BOC и AOD: $\angle CBD = \angle BDA$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC, AD и секущей BD).

Аналогично $\angle BCA = \angle CAD$, следовательно, треугольники BOC и AOD подобны по двум углам, откуда

$$\frac{a}{b} = \frac{d_2}{c_2} = \frac{d_1}{c_1}.$$

$d_2 = \dfrac{a}{b} \cdot c_2$, $d_1 = \dfrac{a}{b} \cdot c_1$, тогда

$$c_1 d_1 + c_2 d_2 = \frac{a}{b} \cdot {c_1}^2 + \frac{a}{b} \cdot {c_2}^2 = \frac{a}{b}({c_1}^2 + {c_2}^2),$$

но треугольник AOD – прямоугольный ($\angle AOD = 90^\circ$), следовательно, $b^2 = {c_1}^2 + {c_2}^2$, откуда

$$c_1 d_1 + c_2 d_2 = \frac{a}{b}({c_1}^2 + {c_2}^2) = ab \qquad \Rightarrow \qquad \frac{c_1 d_1 + c_2 d_2}{2} = \frac{ab}{2},$$

что и требовалось доказать.

б) Площадь четырёхугольника равна полупроизведению его диагоналей на синус угла между ними, откуда

$$S_{ABCD} = (c_1 + d_1)(c_2 + d_2).$$

Так как $c_1 d_1 + c_2 d_2 = ab = 100$, то $c_1 = \dfrac{100 - c_2 d_2}{d_1}$, откуда

$$S_{ABCD} = \left(\frac{100 - c_2 d_2}{d_1} + d_1\right)(c_2 + d_2) =$$

$$100 \cdot \frac{c_2 + d_2}{d_1} - \frac{{c_2}^2 d_2 + c_2 {d_2}^2}{d_1} + d_1(c_2 + d_2).$$

Но по условию

$$100 \cdot \frac{c_2 + d_2}{d_1} - \frac{{c_2}^2 d_2 + c_2 {d_2}^2}{d_1} + d_1(c_2 + d_2) - 500 = 0,$$

тогда

$$100 \cdot \frac{c_2 + d_2}{d_1} - \frac{{c_2}^2 d_2 + c_2 {d_2}^2}{d_1} + d_1(c_2 + d_2) = 500,$$

следовательно, $S_{ABCD} = 500$.